

На правах рукописи

МОХАММАД Ясир Халаф Мохаммад

**АНАЛИЗ ХАОТИЧЕСКИХ И ГИПЕРХАОТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ
КОЛЕБАНИЙ ПО ТОЧЕЧНЫМ ПРОЦЕССАМ НА ОСНОВЕ
ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА**

01.04.03 – Радиофизика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Саратов – 2016

Работа выполнена на кафедре радиофизики и нелинейной динамики физического факультета ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Павлов Алексей Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
кафедры радиофизики ФГАОУ ВО «Волгоградский государственный университет»
Игнатьев Вячеслав Константинович

доктор физико-математических наук, профессор
кафедры физики ФГАОУ ВО «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)»
Курушина Светлана Евгеньевна

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет» (г. Курск)

Защита состоится «16» июня 2016 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.243.01, созданного на базе ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, корпус III, БФА.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. В.А. Артисевич ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» и на сайте <http://www.sgu.ru/research/dissertation-council/d-212-243-01/kandidatskaya-dissertaciya-mohammada-yasira-halafa>

Автореферат разослан «___» апреля 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук

В.М. Аникин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследуемой проблемы. Для динамики многих систем в природе характерна генерация определенных повторяющихся событий; при этом именно моменты их появления являются носителями информации о режиме функционирования системы. Последовательность соответствующих моментов времени удобно представить в виде набора точек на временной оси, что позволяет использовать терминологию *точечных процессов*, хорошо известных в статистической радиофизике. К числу примеров таких процессов можно отнести моменты генерации одиночных импульсов пороговыми устройствами, когда входной сигнал превышает заданный уровень; моменты времени, в которые электроны вылетают из нагретого катода электронной лампы, приводя к появлению дробового шума анодного тока; процесс Пуассона и т.д. В динамике биологических систем примерами являются характерные осцилляторные паттерны, которые генерируются при эпилепсии, и «зажигания» отдельных нейронов. Особый интерес точечные процессы вызывают в нейродинамике, когда анализируются события, соответствующие потенциалам действия нервных клеток или «спайкам» напряжения. Задача их исследования носит междисциплинарный характер. Применительно к радиофизике данная задача связана с изучением принципов кодирования информации нервными клетками и ансамблями нейронов.

К настоящему времени проведены обширные исследования процессов передачи информации, которая содержится в меняющемся во времени сигнале на входе сенсорного нейрона, выходными последовательностями спайков и обоснована возможность восстановления входных стимулов по точечным процессам, генерируемым нейронами¹. Однако менее понятно, каким образом характерные свойства нейронов влияют на соответствующую передачу информации. Понимание данного влияния могло бы способствовать установлению общих принципов обработки информации нейронными ансамблями, применимыми для разных классов нейронов.

С точки зрения теории динамических систем, эволюция во времени переменных, характеризующих состояние нейрона (мембранный потенциал, ионная проводимость и другие), за счет наличия порогового уровня отображается в точечный процесс (последовательность времен генерации спайков) и характеризуется такими величинами, как межспайковые (или межимпульсные) интервалы (МИ). При некоторых условиях МИ можно представить в качестве новой переменной состояния, которая позволяет охарактеризовать временную динамику нейрона. В частности, в работах² обсуждалась задача преобразования входного хаотического сигнала в выходную последовательность спайков с помощью различных моделей пороговых устройств. При этом рассматривалась возможность реконструкции хаотического аттрактора на входе порогового устройства по выходному точечному процессу и обобщения на этот случай теоремы Такенса, доказанной для динамических систем с дискретным или с непрерывным време-

¹ W. Bialek et al., Science 252: 1854–1857 (1991); F. Gabbiani, C. Koch, Neural Comput. 8:44–66 (1996).

² T. Sauer, Chaos 5: 127–132 (1995); R. Castro, T. Sauer, Phys. Rev. E 55: 287–290 (1997).

нем. Применительно к точечному процессу данная реконструкция могла бы осуществляться, например, путем применения метода задержки к последовательности МИ.

Такие рассуждения послужили начальной идеей одной из ключевых работ по рассматриваемой теме³, в которой на примере простейшей модели нейрона «накопление-сброс» (НС) была доказана теорема о том, что применение метода задержки к последовательности МИ позволяет осуществить реконструкцию хаотического аттрактора, соответствующего сигналу на входе. Основываясь на полученных строгих математических результатах, в последующих исследованиях осуществлялись попытки обобщить сделанные выводы⁴. Было установлено, что реконструкция аттрактора является значительно более чувствительной к средней частоте генерации импульсов, чем к распределению МИ.

Более сложной является задача реконструкции аттрактора по точечному процессу модели «пересечение порога» (ПП), имеющей тесную аналогию с введением секущей Пуанкаре для аттрактора динамической системы. Возможность проведения реконструкции по временам возврата обсуждалась в ряде публикаций⁵. С одной стороны, было отмечено сходство фазовых портретов аттракторов, реконструированных по временам возврата, с множествами точек в сечении Пуанкаре хаотического режима динамики на входе модели ПП. С другой стороны, отсутствуют строгие математические результаты, которые могли бы служить доказательством реконструкции динамической системы. Ранее был предложен подход⁶, позволяющий приближенно обосновать возможности восстановления аттрактора по временам возврата. В основе данного подхода была рассмотрена идея восстановления усредненной мгновенной частоты хаотических колебаний. Формально, переход к мгновенной частоте сохраняет метрические и динамические характеристики хаотических режимов колебаний. Сложность анализа времен возврата состоит в том, что они позволяют оперировать только с усредненной мгновенной частотой, и время усреднения меняется. Тем не менее, даже при таких условиях сохраняется возможность проводить расчеты фрактальных размерностей аттракторов и показателей Ляпунова. В частности, расчеты старшего показателя Ляпунова по временам возврата могут быть выполнены с ошибкой, не превышающей 15%, что соответствует допустимой погрешности стандартного метода⁷. Более того, если часть фазовых траекторий будет пропущена (некорректное задание секущей Пуанкаре хаотического аттрактора или большой пороговый уровень для модели ПП), то старший ляпуновский показатель по-прежнему может быть вычислен, если средний МИ модели ПП не превышает время предсказуемости анализируемого режима⁸.

Были проведены исследования, направленные на диагностику гиперхаотических режимов автоколебаний по точечным процессам⁹, однако они не позво-

³ T. Sauer, Phys. Rev. Lett. 72: 3911–3914 (1994).

⁴ D. Racicot, A. Longtin, Physica D 104: 184–204 (1997); R. Castro, T. Sauer, Phys. Rev. Lett. 79: 1030–1033 (1997).

⁵ R. Hegger, H. Kantz, Europhys. Lett. 38: 267–272 (1997); A.N. Pavlov et al., Phys. Rev. E 61: 5033–5044 (2000).

⁶ N. B. Janson et al., Phys. Rev. E 58: R4–R7 (1998).

⁷ A. Wolf et al., Physica D 16: 285–317 (1985).

⁸ J.D. Farmer, J.J. Sidorowich, Phys. Rev. Lett. 59: 845–848 (1987).

⁹ A.N. Pavlov et al., Phys. Rev. E 63: 036205 (2001).

лили сделать однозначный вывод о возможности достоверной оценки показателей Ляпунова по последовательностям времен возврата. Было показано, что если для связанных автоколебательных систем рассматривается секущая плоскость вида $x_j(t) = \Theta$, то соответствующие последовательности времен возврата позволяют вычислить только старший показатель Ляпунова. Для диагностики переходов между хаотическими и гиперхаотическими режимами в этом случае необходимо использовать, по крайней мере, две последовательности времен возврата в разные секущие плоскости. В исследованиях¹⁰ рассмотрены другие варианты диагностики переходов «хаос–гиперхаос» по временным рядам, но они требуют большей статистики времен возврата, необходимой для аппроксимации распределений последовательностей МИ.

Несмотря на многочисленные исследования и большое количество результатов, полученных как численно, так и аналитически, многие аспекты проблемы реконструкции динамических систем по точечным процессам изучены недостаточно детально. Мало изучен вопрос о границах применимости теоремы Зауэра при низкой частоте генерации спайков. Недостаточно внимания уделено проблеме верификации результатов численных исследований – если стандартный метод расчета показателей Ляпунова по временным рядам приводит к ложной диагностике режимов, при которой хаотический процесс идентифицируется как гиперхаотический и наоборот, то можно ли осуществить дополнительную проверку, которая позволила бы убедиться в достоверности сделанных выводов? Не получен однозначный ответ на вопрос о возможности диагностики переходов «хаос–гиперхаос» по одной последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре и проведения расчетов двух положительных показателей Ляпунова по точечным процессам при условии малого объема выборки. Не проведено изучения влияния флуктуаций во входном сигнале на решение задачи реконструкции динамических систем по точечным процессам. Несмотря на то, что стандартный алгоритм расчета показателей Ляпунова предусматривает возможность введения порогового значения, устраняющего дополнительное разбегание траекторий в реконструированном фазовом пространстве за счет наличия аддитивных флуктуаций (измерительного шума), верификация результатов вычислений динамических характеристик зашумленных точечных процессов остается неизученной задачей. Проведение более детальных исследований, направленных на решение проблемы реконструкции динамических систем по точечным процессам, определяет актуальность диссертационной работы.

Цель диссертационной работы состоит в выявлении возможностей и ограничений анализа сложных режимов колебаний по точечным процессам на основе показателей Ляпунова и развитии подходов, позволяющих повысить точность их вычисления.

Для достижения поставленной цели решались следующие **задачи**:

1. Установить границы применимости реконструкции динамических систем по точечным процессам модели «накопление-сброс» при умень-

¹⁰ E.G. Souza et al., Phys. Rev. E 78: 066206 (2008); E.J. Ngamga et al., Chaos 20: 043115 (2010); В.С. Анищенко, С.В. Астахов, Успехи физических наук 183: 1009–1028 (2013).

шении частоты генерации импульсов. Выявить возможности повышения надежности расчета показателей Ляпунова по выходной последовательности межимпульсных интервалов.

2. Изучить возможность диагностики гиперхаотических режимов автоколебаний по последовательностям времен возврата в секущую Пуанкаре. Исследовать влияние объема выборки и способа задания секущей плоскости на надежность диагностики переходов «хаос – гиперхаос».
3. Изучить вопрос о влиянии аддитивного шума на расчет показателей Ляпунова хаотических режимов колебаний по точечным процессам. Разработать метод анализа надежности проводимых оценок для зашумленных точечных процессов.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Продемонстрирована возможность диагностики режимов гиперхаотических колебаний по последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре при наличии небольшого объема выборки (300–500 отсчетов).
2. Предложен критерий достоверности оценки старшего показателя Ляпунова хаотического режима колебаний по зашумленным точечным процессам.
3. Установлены закономерности зависимости величины старшего показателя Ляпунова от задания верхней границы линейного приближения.
4. Продемонстрированы принципиальные различия точности вычисления первого и второго показателей Ляпунова по последовательностям времен возврата хаотических и гиперхаотических режимов колебаний в зависимости от задания секущей Пуанкаре.

Теоретическая и практическая значимость результатов:

1. Предложенная модернизация метода расчета показателей Ляпунова по последовательностям времен возврата позволяет повысить надежность идентификации динамического режима и избежать ошибочной идентификации, вызванной наличием артефактов.
2. Разработанная модификация метода расчета показателей Ляпунова, предусматривающая построение зависимости оцениваемой величины от ошибки ориентации, позволяет расширить возможности диагностики хаотических режимов колебаний по зашумленным процессам и предложить критерии достоверности вычисления количественных мер предсказуемости экспериментальных данных.
3. Результаты диссертации могут применяться в учебном процессе при подготовке студентов радиофизических специальностей. В настоящее время результаты используются в лабораторной работе «Анализ точечных процессов» спецпрактикума для студентов магистратуры физического факультета Саратовского государственного университета.

Достоверность научных выводов работы базируется на применении апробированных методов анализа структуры сигналов, устойчивости применяемых алгоритмов к изменениям параметров счета, непротиворечивости резуль-

татов и выводов диссертационной работы известным теоретическим представлениям.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Верхняя граница линейного приближения при расчете старшего показателя Ляпунова по точечным процессам модели «накопление–сброс» является наиболее важным параметром, влияющим на точность проводимых расчетов, по сравнению с параметрами реконструкции, такими как временная задержка и размерность пространства вложения. Наибольшая точность расчетов достигается в малой окрестности максимума зависимости оцениваемого старшего показателя Ляпунова от верхней границы линейного приближения.
2. Режим гиперхаоса в динамике связанных автоколебательных систем диагностируется по последовательностям времен возврата в секущую Пуанкаре, составляющим несколько сотен отсчетов, если уравнение секущей плоскости задано таким образом, что соответствующие последовательности времен возврата отражают сопоставимый вклад динамики каждой системы. Наличие близких значений положительных показателей Ляпунова приводит к недооценке второго показателя, но не препятствует диагностике переходов между хаотическими и гиперхаотическими режимами динамики при изменении управляющих параметров.
3. Наличие максимума зависимости оцениваемого старшего показателя Ляпунова от допустимой ошибки ориентации векторов при проведении перенормировок вектора возмущения в реконструированном фазовом пространстве является индикатором корректности проводимых расчетов. Изменение наклона этой зависимости в области больших ошибок ориентации позволяет диагностировать наличие шума в точечном процессе при условии высокой частоты преобразования входного аналогового сигнала в выходную последовательность импульсов.

Апробация работы и публикации. Материалы диссертации были представлены на международных научных конференциях: «Dynamics and Fluctuations in Biomedical Photonics XIII» (Сан-Хосе, США, 2016), «Saratov Fall Meeting» (Саратов, СГУ, 2015), Всероссийской молодежной конференции «Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине» (Саратов, СГУ, 2014, 2015), 5-й научно-практической конференции “Presenting Academic Achievements to the World” (Саратов, СГУ, 2014). Результаты диссертации обсуждались на научных семинарах кафедры радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета и Потсдамского института исследований влияния климата (Германия).

По теме диссертации опубликовано 8 работ: 5 статей в журналах, входящих в перечень ВАК РФ или в перечень изданий, включенных в международные системы Scopus и Web of Science, и 3 статьи в сборниках трудов конференций. Результаты работы использовались при выполнении гранта Российского научного фонда № 14-12-00224.

Личный вклад автора. Результаты исследований, представленные в диссертации, были получены лично автором. Автором проводились численные исследования на основе методов реконструкции динамических систем. Объяснения полученных результатов и подготовка научных статей были проведены совместно с соавторами и научным руководителем.

Структура и объём диссертации. Диссертация включает введение, три главы, в которых обсуждается основное содержание работы, заключение и список цитированной литературы, содержащий 133 источника, изложена на 121 странице, содержит 41 рисунок.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обсуждается актуальность темы диссертации, приводятся формулировки цели и задач выполненного исследования, изложены научная новизна и научно-практическое значение результатов диссертации, сформулированы положения и результаты, выносимые на защиту.

В **первой главе** диссертации решается задача реконструкции динамических систем по точечным процессам, которые регистрируются на выходе модели «накопление-сброс». В рамках данной модели входной сигнал $S(t)$, генерируемый системой с малоразмерной динамикой, интегрируется, начиная с момента времени T_0 . В моменты времени $T_i, i=1, 2, \dots, n$, когда интеграл достигает пороговый уровень θ , происходит генерация стереотипного одиночного импульса (спайка), после чего интеграл обнуляется. Соответствующая процедура описывается уравнением

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t) dt = \theta, \quad I_i = T_{i+1} - T_i. \quad (1)$$

При высокой частоте генерации импульсов, то есть малых значениях МИ (I_i), значения входного сигнала восстанавливаются по выходному точечному процессу

$$S\left(\frac{T_i + T_{i+1}}{2}\right) \approx \frac{\theta}{I_i}, \quad (2)$$

причем, точность восстановления возрастает с уменьшением I_i . В соответствии с теоремой о среднем, можно ввести в рассмотрение моменты времени \hat{t}_i , в которые выполняется равенство

$$S(\hat{t}_i) = \frac{\theta}{I_i}, \quad T_i \leq \hat{t}_i \leq T_{i+1}. \quad (3)$$

Так как при анализе точечных процессов информация о динамике между импульсами отсутствует, появляется неопределенность δ нахождения соответствующих значений \hat{t}_i

$$\hat{t}_i = \left(\frac{T_i + T_{i+1}}{2} + \delta_i \right), \quad (4)$$

которая возрастает при больших I_i , ассоциирующихся с большими пороговыми уровнями θ . Увеличение неопределенности δ приводит к росту ошибок восстановления выборочных значений входного сигнала. Для применения стандартного метода реконструкции эти выборки интерполируются гладкой функцией.

На примере системы Рёсслера

$$\frac{dx}{dt} = -(y+z), \quad \frac{dy}{dt} = x+ay, \quad \frac{dz}{dt} = b+z(x-c) \quad (5)$$

в режиме фазо-когерентного хаоса ($a=0.15$, $b=0.2$, $c=10$) подтверждено соответствие между двумя старшими показателями Ляпунова, вычисленными с применением трех методов: по уравнениям системы (5), по временной зависимости координаты $x(t)$, а также по последовательности I_i на выходе модели (1), на вход которой поступает сигнал $x(t)$ – рисунок 1. Данное соответствие наблюдается при условии, что средний временной интервал между последовательными моментами генерации импульсов НС-моделью не превышает 1/4 базового периода хаотических колебаний. В противном случае наблюдается уменьшение показателя λ_1 и увеличение показателя λ_2 , в результате чего хаотический режим колебаний может ошибочно диагностироваться как гиперхаотический.

Независимо от выбора порогового уровня θ , показатели Ляпунова, вычисленные по последовательностям МИ, не демонстрируют существенных изменений при вариации стандартных параметров реконструкции, таких как задержка по времени (τ) или размерность пространства вложения (d). Из-за небольших флуктуаций значений показателей представляется целесообразным проводить усреднение для разных τ и d . Это позволяет снизить погрешность вычисления, вызванную случайным выбором данных параметров.

Выбор параметров алгоритма становится более важным, когда рассматривается зависимость λ_1 от максимального размера вектора возмущения l , который определяет условия линейного приближения, ассоциирующегося с экспоненциальным ростом возмущений в окрестности базовой траектории. В соответствии с рисунком 2, значение l должно тщательно выбираться для корректной оценки λ_1 . Рассмотрим особенности зависимостей, изображенных на рисунке 2, начиная со случая $\theta=5$ (отмечена звездочками). Для данного порогового уровня частота генерации является высокой (около 50 импульсов на характерный период хаотических колебаний), поэтому неопределенность δ очень ма-

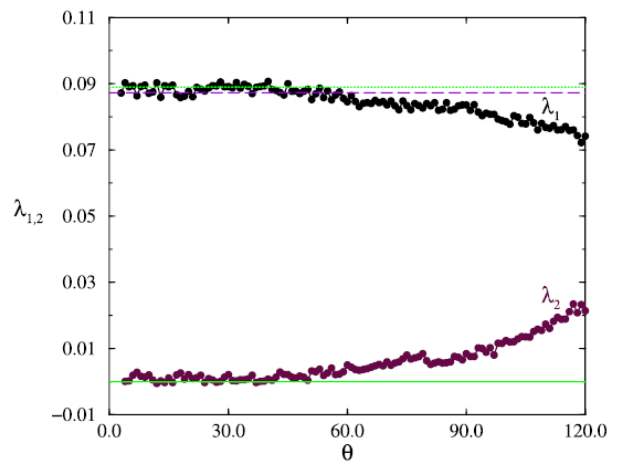


Рис. 1 – Расчеты двух старших показателей Ляпунова по последовательностям МИ модели НС при различных значениях порогового уровня θ . Пунктирная линия обозначает значение показателя $\lambda_1=0.087$, вычисленное по уравнениям модели (5). Точками обозначено значение $\lambda_1=0.089$, вычисленное по координате $x(t)$.

ла, и в данном случае ей можно пренебречь, проводя восстановление входного сигнала по точечному процессу.

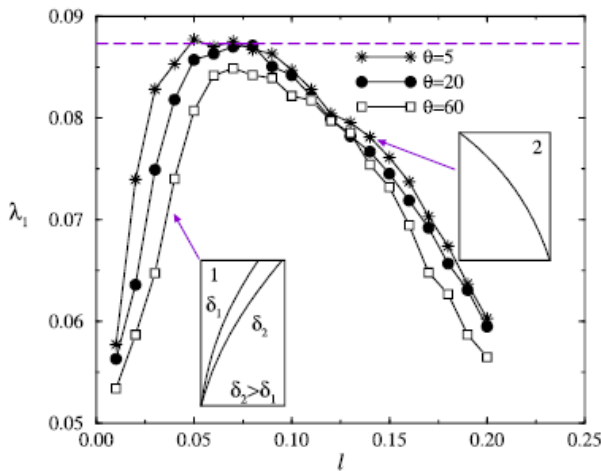


Рис. 2 – Расчеты старшего показателя Ляпунова по последовательности МИ модели НС в зависимости от максимального размера вектора возмущения. Пунктирная линия обозначает значение показателя, вычисленное по уравнениям системы (5).

траекторией и соседней траекторией увеличивается примерно до 10% от размера аттрактора, их разбегание перестает быть экспоненциальным. Это приводит к недооценке значений λ_1 , так как длина вектора до перенормировки обычно меньше, чем ожидаемое значение. Такие ограничения можно приближенно описать зависимостью

$$\lambda_1(l) \sim \frac{1}{t^*} \ln(A - B \cdot l), \quad (6)$$

где t^* – время между перенормировками, A и B – некоторые постоянные величины, $A \gg B$. Зависимость (6) проиллюстрирована на вставке 2 (рисунок 2). Соответствующее ограничение всегда возникает при расчете показателей Ляпунова по временному ряду с применением стандартного метода расчета¹¹. Наличие двух отмеченных ограничений приводит к снижению λ_1 , и полученная величина может оказаться существенно меньше ожидаемого значения показателя Ляпунова.

Если последовательности МИ модели НС рассматриваются при больших значениях порогового уровня θ , появляется дополнительный фактор, ограничивающий значение λ_1 в диапазоне малых l . В этой области размер вектора возмущения r_0 становится сопоставимым с величиной δ , характеризующей неопределенность идентификации моментов времени, которые ассоциируются с выборочными значениями сигнала $S(t)$ (4). При рассмотрении одинаковой неопределенности для перенормированного вектора и вектора возмущения до перенормировки, значение λ_1 можно приближенно вычислить следующим образом

¹¹ A. Wolf et al., Physica D 16: 285–317 (1985).

$$\lambda_1(l) \sim \frac{1}{t^*} \ln \left(\frac{l + \delta}{r_0 + \delta} \right). \quad (7)$$

Эта зависимость ограничивает величину λ_1 , и результирующий показатель Ляпунова уменьшается при больших δ , соответствующих большому пороговому уровню θ , что проиллюстрировано на вставке 1 (рисунок 2). На данной вставке изображена зависимость множителя, ограничивающего λ_1 для разных l и двух значений δ .

Чтобы количественно охарактеризовать функцию $\lambda_1(l)$, предлагается оценить ее ширину Δ_λ . При проведении расчетов ширина оценивалась как расстояние между двумя значениями l , относящимися к уровню 80% от максимума $\lambda_1(l)$, то есть значениями $\lambda_1 \approx 0.07$. Отметим, что ширина Δ_λ зависимости $\lambda_1(l)$ уменьшается с ростом порогового уровня, обеспечивая возможность количественного описания влияния неопределенностей δ на недооценку показателей Ляпунова. Таким образом, вычисление зависимостей $\lambda_1(l)$ позволяет проводить более точную оценку ляпуновских показателей (путем определения максимальных значений) и характеризовать эффекты низкой частоты генерации по уменьшению ширины Δ_λ .

В целях исключения из рассмотрения возможных ограничений, связанных с малой выборкой, расчеты показателей Ляпунова проводились по последовательностям, содержащим 10 000 МИ. Проводя более детальные численные исследования, было обнаружено, что для достоверного определения показателей Ляпунова и диагностики режима динамики по точечному процессу достаточно ограничиться существенно меньшей выборкой n . Хорошая точность определения λ_1 (с ошибкой менее 10%) достигается для $n > 1500$ МИ, что соответствует примерно 125 базовым периодам хаотических колебаний. Если расчеты показателей Ляпунова проводятся для диагностики переходов «хаос-гиперхаос» и выявления различий хаотических и гиперхаотических режимов автоколебаний, объем выборки целесообразно увеличить примерно до 4500 МИ. Аналогичные результаты и выводы были сделаны для других систем, демонстрирующих хаотическую динамику (система Лоренца, генератор с инерционной нелинейностью).

Во **второй главе** диссертации решается задача диагностики переходов «хаос – гиперхаос» по последовательностям времен возврата в секущую Пуанкаре. Переходы между хаотическими и гиперхаотическими режимами автоколебаний в сложных нелинейных системах сравнительно легко можно идентифицировать, если математическая модель рассматриваемой системы известна. При анализе точечных процессов, таких как времена возврата в секущую Пуанкаре, диагностика режима гиперхаоса является существенно более сложной.

В диссертационной работе рассматривается подход, основанный на идее аппроксимации усредненной мгновенной частоты сложных колебаний¹², который состоит в следующем. Рассмотрим систему, демонстрирующую хаотиче-

¹² N. B. Janson et al., Phys. Rev. E 58: R4–R7 (1998).

ские колебания, и выберем в качестве динамической переменной координату $x(t)$. Зададим секущую Пуанкаре в виде $x(t)=\Theta$. Если T_i – времена пересечения данной секущей плоскости, и I_i – времена возврата, $I_i=T_{i+1}-T_i$, то можно вычислить значения

$$\omega(T_i) = \frac{2\pi}{I_i}, \quad (8)$$

которые соответствуют выборкам мгновенной частоты хаотических колебаний, вычисленной на основе преобразования Гильберта и усредненной за время возврата I_i . Значения $\omega(T_i)$ можно интерпретировать как результат усреднения мгновенной частоты в пределах временного окна с меняющимся размером. Эти выборки известны только в дискретные моменты времени T_i . Чтобы анализировать динамические характеристики рассматриваемого режима, необходимо ввести постоянный шаг по времени между соответствующими точками. Это может быть выполнено путем интерполяции значений $\omega(T_i)$ гладкой функцией, например, кубическим сплайном. Несмотря на то, что при этом не удастся точно воспроизвести временную зависимость мгновенной частоты, полученный временной ряд $\omega(j\Delta t)$ позволяет провести приближенную реконструкцию хаотического аттрактора с использованием стандартного метода задержки и, следовательно, охарактеризовать динамические и метрические свойства восстановленного аттрактора.

Чтобы количественно охарактеризовать динамические свойства гиперхаотических режимов динамики по последовательностям времен возврата в секущую Пуанкаре, была выбрана модель двух связанных систем Рёсслера

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -w_1 y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1), & \frac{dy_1}{dt} &= w_1 x_1 + a y_1, & \frac{dz_1}{dt} &= b + z_1(x_1 - c), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -w_2 y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2), & \frac{dy_2}{dt} &= w_2 x_2 + a y_2, & \frac{dz_2}{dt} &= b + z_2(x_2 - c). \end{aligned} \quad (9)$$

В модели (9) параметры a , b и c характеризуют режим динамики каждой подсистемы, а параметр γ – коэффициент связи. Базовые частоты $w_1 = w_0 + \Delta$ и $w_2 = w_0 - \Delta$ имеют малую расстройку Δ , которая обеспечивает различия динамики подсистем. В проводимых исследованиях был выбран следующий набор параметров: $a=0.15$, $b=0.2$, $\gamma=0.02$, $w_0=1.0$, $\Delta=0.0093$. Параметр c менялся в диапазоне $[6.8, 8.0]$, включая области как хаотической, так и гиперхаотической динамики.

Основной вывод ранее проводившихся исследований, направленных на диагностику переходов «хаос – гиперхаос», состоял в том, что одной последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре недостаточно для корректной оценки двух старших показателей Ляпунова, вследствие чего гиперхаотический режим будет ошибочно диагностирован как хаотический. Этот вывод был подтвержден на примере секущих плоскостей $x_1=0$ и $x_2=0$. Однако, если рассматриваются две последовательности времен возврата в указанные секу-

щие плоскости, то режим колебаний диагностируется правильно. Возникает вопрос – действительно ли наличие двух последовательностей времен возврата является необходимым условием для оценки двух показателей Ляпунова, или с этой целью можно использовать одну последовательность времен возврата при условии подходящего задания секущей плоскости.

Чтобы охарактеризовать гиперхаотическую динамику на основе одной последовательности времен возврата, необходимо ввести секущую плоскость таким образом, чтобы она в большей степени учитывала динамику обеих подсистем. На рисунке 3 приведены результаты для секущей плоскости, заданной уравнением $x_2 + y_1 = 0$ (и аналогичные результаты получены для секущей плоскости $x_1 + y_2 = 0$). В этом случае используется одна последовательность времен возврата, которой достаточно для вычисления двух положительных показателей Ляпунова, характеризующих гиперхаотический режим. Получение такой последовательности можно интерпретировать как прохождение суммарным сигналом $x_2(t) + y_1(t)$ через порогового устройства с величиной порога, равной нулю. Рассмотрение предыдущих вариантов секущей плоскости можно интерпретировать как прохождение через ноль сигнала, например, $k_1 x_1 + k_2 y_2 = 0$, при условии, что $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, то есть учитывается динамика лишь одной подсистемы (вторая подсистема, тем не менее, оказывает влияние, которое определяется коэффициентом связи, но это влияние существенно слабее, чем при задании секущей в виде $x_2(t) + y_1(t) = 0$).

Чтобы избежать ложной идентификации динамических режимов, в данной диссертационной работе предложена модернизация алгоритма расчета, включающая следующие основные моменты:

- 1) Выходная последовательность I_i должна быть проверена на наличие артефактов, включая генерацию дополнительных импульсов (когда суммирование двух динамических переменных приводит к появлению пары импульсов вместо одного) или пропуски части импульсов при больших пороговых уровнях Θ . Если возникают пропуски импульсов, выходная последовательность I_i содержит временные интервалы, близкие к значениям $2T_b$, $3T_b$, ..., где T_b – базовый период колебаний, то есть период, соответствующий базовой частоте в спектре мощности (в режиме фазокогерентной динамики). В этом случае выборки усредненной мгновенной

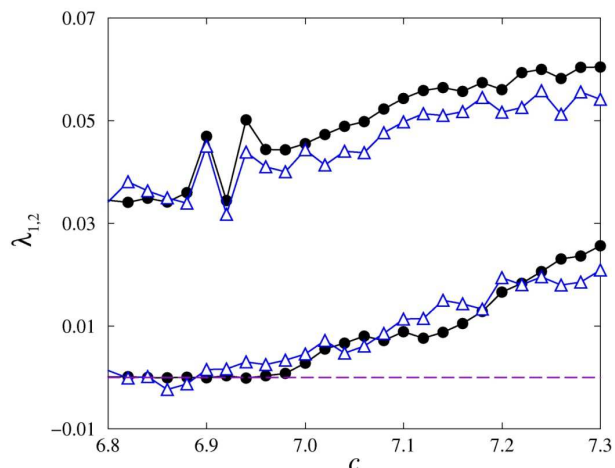


Рис. 3 – Зависимости двух старших показателей Ляпунова от управляющего параметра модели двух связанных систем Рёсслера. Кругами обозначены результаты расчета по уравнениям модели, треугольниками – по последовательности времен возврата в секущую плоскость $x_2 + y_1 = 0$.

частоты $\omega(T_i)$ должны определяться по формуле $\omega(T_i) = 2\pi m / I_i$, где m выбирается из условия медленных изменений $\omega(t)$.

- 2) При анализе последовательностей времен возврата с широким распределением значений I_i целесообразно проводить дополнительные оценки показателей Ляпунова в зависимости от способа интерполяции (сплайны, полиномы и т.п.). Если различие значений λ_1 , вычисленных для двух гладких функций (с применением разных методов интерполяции) превышает 10%, это служит индикатором высокой variability полученных результатов. Данная проверка особенно важна при анализе режимов развитого хаоса.

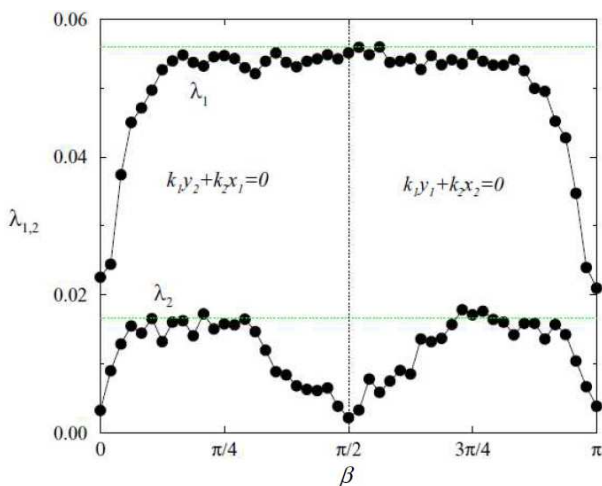


Рис. 4 – Расчеты двух старших показателей Ляпунова в зависимости от выбора секущей плоскости. Пунктирные линии отмечают значения, вычисленные по уравнениям модели (9).

для обоих показателей будут получены в том случае, когда вклады обеих подсистем сопоставимы (β близко к $\pi/4$ или $3\pi/4$). Если сигнал одной из подсистем доминирует, может произойти ошибочная диагностика режима колебаний. Отметим, что максимальный показатель Ляпунова правильно вычисляется в более широком диапазоне значений β по сравнению со вторым показателем. Это подтверждает, что расчеты второго показателя Ляпунова представляют собой более сложную задачу. Если в последовательностях МИ присутствуют артефакты, погрешность вычислений резко возрастает.

Более детальные исследования свидетельствуют о том, что рассматриваемый подход применим и для сравнительно небольшого объема выборки. Использование длительных последовательностей времен возврата позволяет снизить ошибки вычисления и возможные флуктуации значений λ_1 и λ_2 , связанные с неподходящим выбором параметров реконструкции. Однако для диагностики перехода «хаос – гиперхаос» достаточно последовательностей, содержащих 300-500 отсчетов. Необходимый объем выборки можно оценить в зависимости от требуемой точности.

Для иллюстрации зависимости результатов расчета показателей Ляпунова от выбора секущей плоскости в диссертации были рассмотрены пересечения нулевого уровня сигналом на входе ПП-модели, заданного в виде: $k_1 y_2(t) + k_2 x_1(t)$ или $k_1 y_1(t) + k_2 x_2(t)$, где $k_1 = \sin \beta$, $k_2 = \cos \beta$. Полученные результаты представлены на рисунке 4. В зависимости от β можно выбрать секущую плоскость, для которой отсутствуют артефакты, вызванные генерацией дополнительных импульсов (по этой причине для разных β на рисунке 4 рассмотрены разные секущие плоскости). Правильные результаты

В третьей главе диссертации решается задача расчета старшего показателя Ляпунова хаотических режимов колебаний по точечным процессам при наличии шума. Ранее проводившиеся исследования, результаты которых были представлены в предыдущих главах, акцентировали внимание на детерминированных режимах динамики на входе НС- и ПП-моделей. Случай наличия шума во входных сигналах не был рассмотрен, несмотря на то, что шум может оказывать существенное влияние на вычисляемые характеристики. В данной главе рассматривается измерительный шум, не влияющий на динамику системы. Такая задача позволяет, например, смоделировать ситуацию, когда на вход порогового устройства поступает сумма полезного сигнала и шума сравнительно небольшой интенсивности, и детерминированная динамика является доминирующей.

Предложена модификация метода расчета старшего показателя Ляпунова по точечным процессам при наличии шума. Проведенные исследования показали, что информативной характеристикой, подтверждающей правильность расчета старшего показателя Ляпунова, является зависимость λ_1 от максимально допустимой ошибки ориентации α , т.е. угла между векторами возмущения до и после перенормировки, при условии, что новое возмущение выбирается путем минимизации длины вектора в диапазоне $[l_{\min}, l_{\max}]$, который определяет границы линейного приближения. Из общих соображений ожидается, что большие ошибки ориентации приводят к недооценке величины λ_1 . Кроме того, очень малые значения α существенно уменьшают возможность выбора подходящего вектора возмущения, что приводит к выходу за границы линейного приближения, что также сопровождается уменьшением величины показателя.

Расчеты были проведены на примере системы (5). Для обеспечения высокой частоты генерации импульсов в качестве входного сигнала модели НС выбиралось линейное преобразование первой координаты $S(t) = x(t) + 35$. Эффект шума учитывался путем добавления нормально распределенного случайного процесса с интенсивностью D , то есть сигнал на входе НС-модели задавался в виде $S(t) + D\xi(t)$. Вычисление старшего показателя Ляпунова проводилось с использованием следующего варианта перенормировок: вектор возмущения выбирался с ошибкой ориентации, не превышающей α , при условии минимизации его длины в диапазоне $[l_{\min}, l_{\max}]$. Рисунок 5 демонстрирует характерные зависимости $\lambda_1(\alpha)$ для порогового значения $\theta=10$ и различных интенсивностей шума D . Если $D=0$, зависимость $\lambda_1(\alpha)$ демонстрирует максимум вблизи значения $\alpha \approx \pi/25$.

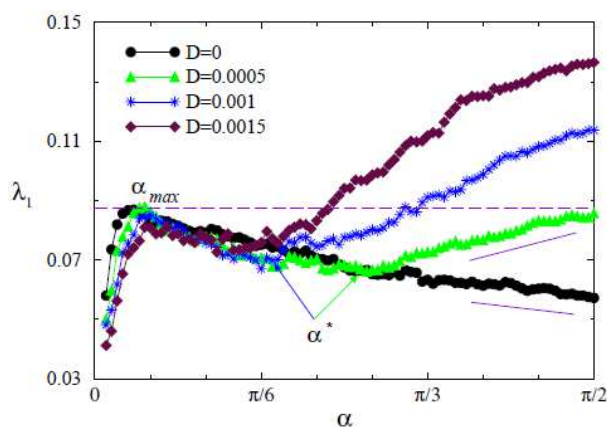


Рис. 5 – Зависимости λ_1 хаотического режима динамики системы (5), вычисленные по последовательностям МИ модели НС при $\theta=10$, от величины α при разных значениях интенсивности аддитивного шума. Пунктир обозначает результат расчета по уравнениям системы (5). Расчеты проводились при значениях параметров алгоритма $l_{\min}=0.01$, $l_{\max}=0.1$ по последовательностям, содержащим 2000 МИ.

Для углов $\alpha < \alpha_{\max}$ уменьшение λ_1 вызвано частыми перенормировками. В области $\alpha > \alpha_{\max}$ значения λ_1 уменьшаются с ростом α из-за возрастающих ошибок ориентации. Соответствующая зависимость $\lambda_1(\alpha)$ характеризуется отрицательным наклоном в диапазоне $[\pi/3, \pi/2]$. Для оптимального значения угла α_{\max} вычисленный старший ляпуновский показатель принимает значение, близкое к величине, вычисленной по уравнениям системы Рёсслера (горизонтальная линия на рисунке 5). Наличие оптимума в области сравнительно малых углов может интерпретироваться как индикатор правильности проведенных вычислений λ_1 . Характер зависимости $\lambda_1(\alpha)$ (рисунок 5, круги) является типичным для детерминированных последовательностей МИ модели НС.

При добавлении слабого шума зависимость $\lambda_1(\alpha)$ приобретает другую форму (рисунок 5, треугольники). В области больших α ее наклон становится положительным, начиная с некоторого значения α^* , которое зависит как от интенсивности шума, так и от параметров алгоритма, таких как пороговое значение l_{\min} , которое определяет минимальное расстояние между траекториями в фазовом пространстве.

Однако наличие оптимума в точке α_{\max} по-прежнему позволяет проводить оценку старшего показателя Ляпунова. Если интенсивность шума возрастает, то α^* приближается к α_{\max} , и локальный максимум зависимости $\lambda_1(\alpha)$ в точке α_{\max} исчезает. В этом случае отсутствует возможность проверки правильности вычисления старшего показателя Ляпунова, и полученная величина λ_1 может существенно отличаться от её ожидаемого значения. Дополнительно, зависимость $\lambda_1(\alpha)$ может использоваться для оценки уровня шума, присутствующего в анализируемой последовательности МИ, так как возрастающая интенсивность шума приводит к увеличению наклона $\lambda_1(\alpha)$ в области $\alpha > \alpha^*$ (рисунок 5) и уменьшению значений α^* . Несмотря на то, что значение α^* может варьироваться в зависимости от параметров алгоритма, в случае зашумленных данных сохраняется переход от отрицательного к положительному наклону зависимости $\lambda_1(\alpha)$ при больших α .

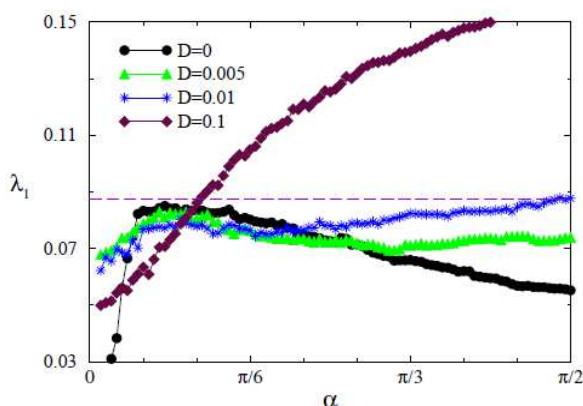


Рис. 6 – Зависимости λ_1 хаотического режима динамики системы (5), вычисленные по последовательностям МИ модели ПП, от величины α при разных значениях интенсивности аддитивного шума.

Анализ межспайковых интервалов ПП-модели, отражающих динамику хаотических колебаний, также проводился для системы (5) при условии, что в качестве входного сигнала была выбрана координата $x(t)$, а порог задан равенством $\theta=0$. Для исследования влияния шума к последовательности межспайковых интервалов добавлялся нормально распределенный случайный процесс с интенсивностью D . Вычисленные зависимости $\lambda_1(\alpha)$ приведены на рисунке 6. В отсутствие шума зависимости $\lambda_1(\alpha)$, вычисленные по после-

довательности МИ модели ПП, похожи на соответствующие зависимости, представленные на рисунке 5. Для них также существует оптимальное значение угла α_{\max} , при котором наблюдается максимум зависимости $\lambda_1(\alpha)$. Значения старшего показателя Ляпунова, ассоциирующееся с углом α_{\max} , приближаются к ожидаемой величине λ_1 , показанной горизонтальной линией на рисунке 6. Слева и справа от оптимума наблюдается спад показателя по аналогии с результатами, полученными для НС-модели. Добавление шума к последовательности МИ модели ПП приводит к изменению характера соответствующей зависимости $\lambda_1(\alpha)$. Как и для НС-модели, с ростом интенсивности шума появляется положительный наклон данной зависимости при больших углах α , и этот наклон увеличивается с ростом интенсивности шума. При больших D максимум зависимости $\lambda_1(\alpha)$ исчезает, и результаты расчетов становятся недостоверными. Расчеты, проведенные для других систем с хаотической динамикой, подтверждают сделанные выводы.

В **заклЮчении** диссертации суммируются основные результаты и выводы работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Показано, что зависимость старшего показателя Ляпунова от максимального расстояния между траекториями в реконструированном фазовом пространстве позволяет проводить выбор оптимального значения верхней границы линейного приближения, приводящего к более точным оценкам старшего показателя.
2. Установлено, что для корректной диагностики режима динамики на входе порогового устройства, которое описывается моделью НС или ПП, достаточно сравнительно небольшой выборки точечного процесса (менее 500 отсчетов).
3. Предложена модернизация метода расчета показателей Ляпунова по последовательностям времен возврата, позволяющая избежать ошибочной идентификации динамического режима, вызванной наличием артефактов. Предложенный обобщенный метод позволяет проводить корректное определение двух положительных показателей Ляпунова, характеризующих динамику связанных автоколебательных систем.
4. Показано, что расчеты второго показателя Ляпунова по последовательности времен возврата демонстрируют более сильную зависимость от выбора секущей плоскости по сравнению с расчетами максимального показателя Ляпунова.
5. Предложена модификация метода расчета показателей Ляпунова, предусматривающая построение зависимости оцениваемой величины от ошибки ориентации, которая позволяет расширить возможности диагностики хаотических режимов колебаний по зашумленным процессам и предложить критерии достоверности вычисления количественных мер предсказуемости экспериментальных данных.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. A.N. Pavlov, O.N. Pavlova, **Y.K. Mohammad**, J. Kurths. Characterization of the chaos-hyperchaos transition based on return times // *Phys. Rev. E*. – 2015. – Vol. 91. – P. 022921.
2. A.N. Pavlov, O.N. Pavlova, **Y.K. Mohammad**, J. Kurths. Quantifying chaotic dynamics from integrate-and-fire processes // *CHAOS*. – 2015. – Vol. 25. – P. 013118.
3. А.Н. Павлов, О.Н. Павлова, **Я.Х. Мохаммад**. Диагностика режима гиперхаотической динамики по интервалам времени пересечения порогового уровня // *Письма в ЖТФ*. – 2015. – Т. 41, вып. 6. – С. 98–104.
4. А.Н. Павлов, О.Н. Павлова, **Я.Х. Мохаммад**. Погрешности анализа характеристик сложных режимов колебаний по точечным последовательностям модели «накопление-сброс» // *Письма в ЖТФ*. – 2015. – Т. 41, вып. 21. – С. 74–79.
5. A.N. Pavlov, O.N. Pavlova, **Y.K. Mohammad**, G.M. Shihalov. Quantifying chaotic dynamics from interspike intervals // *Proceedings of SPIE*. – 2015. – Vol. 9448. – P. 94481O.
6. А.Н. Павлов, О.Н. Павлова, **Я.Х. Мохаммад**. Реконструкция динамических систем по точечным процессам в динамике нейронных моделей // *Материалы Всероссийской школы-семинара «Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине – 2014»*. – Саратов: Изд-во Саратовский источник, 2014. – С. 113–116.
7. **Я.Х. Мохаммад**, О.Н. Павлова, А.Н. Павлов. Расчет динамических характеристик хаотических колебаний по точечным процессам при наличии шума // *Материалы Всероссийской молодежной конференции «Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине – 2015»*. – Саратов: Изд-во Саратовский источник, 2015. – С. 141–143.
8. **Y.K. Mohammad**, A.N. Pavlov. Wavelet analysis of complex signals // *Материалы 5-й научно-практической конференции «Presenting Academic Achievements to the World»*. – Саратов: Изд-во СГУ, 2014. – С. 139–143.

МОХАММАД Ясир Халаф Мохаммад

**АНАЛИЗ ХАОТИЧЕСКИХ И ГИПЕРХАОТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ
КОЛЕБАНИЙ ПО ТОЧЕЧНЫМ ПРОЦЕССАМ НА ОСНОВЕ
ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА**

01.04.03 – Радиофизика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати _____.2016. Формат 60x48 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Печать цифровая. Усл. печ. л. ____
Тираж 100 экз. Заказ № ____
