

А.В.Хохлов

ИССЛЕДОВАНИЕ  
СТРУКТУРЫ РАДИОСИГНАЛОВ  
СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ  
(Сканирующий анализатор спектра)

*Учебное пособие для спецтрактажума по курсу  
"Теоретические основы радиоэлектроники"*

Ц е л ь р а б о т ы: исследование периодических и модулированных сигналов спектральным методом.

**Литература**

1. Калинин В.И., Герштейн Г.М. Введение в радиофизику. М.: Гостехиздат, 1957.
2. Хохлов А.В. Теоретические основы радиоэлектроники. Саратов. Изд-во Саратов. ун-та, 2005.
3. Зернов Н.В., Карлов В.Г. Теория радиотехнических цепей. Л.: Энергия, 1972.
4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. М.: Выспш.шк., 1983.
5. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: Гостехиздат, 1957.
6. Мирский Г.Я. Радиоэлектронные измерения. М.: Энергия, 1975.
7. Кушнир Ф.В. Электрорадиоизмерения. Л.: Энергоатомиздат, 1983.

**Контрольные вопросы:**

1. Что понимают под спектральным представлением сигнала?
2. Как представить в аналитической форме и графически вещественный и комплексный спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов? В чем различие вещественного и комплексного спектров? Как изменится спектр при изменении длительности импульсов и частоты повторения?
3. Как можно промодулировать высокочастотное гармоническое колебание? Какие виды модуляции Вам известны и в чем их физический смысл?
4. Как представить аналитические выражения и амплитудные спектры для однотонового и многотонового АМ-колебаний?
5. Как представить аналитические выражения и амплитудные спектры для однотонового ЧМ-колебания при малом и большом значениях индекса частотной модуляции?

- При каких условиях в спектре ЧМ-колебания отсутствуют несущая, первая боковая или вторая боковая составляющие?
- Каковы функциональная схема и принцип действия сканирующего анализатора спектра?

### Задания для самостоятельной работы

- Вывести интегральные формулы для коэффициентов  $c_0$  и  $c_k$  в разложении (8).
- Вывести формулы (16), (35), (36) для расчета  $\alpha$ ,  $Q$  и  $R_L$  в режиме собственных колебаний.
- Вывести соотношения для спектрального представления ЧМ-сигнала при  $\beta \rightarrow 0$ .
- Используя таблицы функций Бесселя из приложения, рассчитать амплитудные спектры ЧМ-сигналов при  $\beta = 2.4$ ,  $\beta = 3.8$ ,  $\beta = 5.1$  и  $\beta = 5.5$ .

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Спектры периодических колебаний

**Разложение в тригонометрические ряды Фурье.** Будем рассматривать периодические колебания

$$x(t + T) = x(t),$$

где  $T$  - период колебания, а в качестве базиса используем следующий систему тригонометрических функций с кратными частотами:

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \sqrt{\frac{1}{T}}, \\ \Phi_{1C}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi}{T} t, & \Phi_{1S}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi}{T} t, \\ \Phi_{2C}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2 \frac{2\pi}{T} t, & \Phi_{2S}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2 \frac{2\pi}{T} t, \\ & \dots & & \dots \end{aligned}$$

Представленная совокупность функций является ортонормальной на отрезке  $[0, T]$ , т.е.

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi_k(t) \Phi_m^*(t) dt = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\delta_{km}$  - символ Кронекера. Тогда колебание  $x(t)$  можно представить соотношением

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dot{a}_i \Phi_i(t). \quad (2)$$

Наименование органов управления и присоединения	Назначение	Рекомендуемое положение
1	2	3
РАЗВЕРТКА переключатель	Установка необходимого вида развертки АРТ - периодическая РУЧ - ручная ОДИН. - однократная кнопка запуска одной краевой развертки	
ВИДЕОФИЛЬТР переключатель	Для установки необходимой постоянной времени детектора	ВЫКЛ.
ПОЛУСА НЧ переключатель	Включение полос пропускания от 3 до 300 Гц	
УРОВЕНЬ dBV переключатель	Установка необходимого уровня напряжения следящего сигнала	0
0.01-60 kHz тумблер	Выход следящего сигнала	
КАЛИБРАМПЛ. 80mV 10kHz тумблер	Включение калибратора	выключено
0.06-300 MHz 0.01-60 kHz тумблер	Вход сигнала при работе в диапазоне 0,06-300 МГц (при подключении внешнего генератора)	
0.06-300 MHz 0.01-60 kHz тумблер	Переключение входов 0,06-300 MHz или 0,01-60 kHz	
0.01-60 kHz тумблер	Вход сигнала при работе в диапазоне 0,01-60 кГц	
НОМИНАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ переключатель	Переключения аттенуаторов (входного - внутреннего переключатель и промежуточной частоты - внешний диск)	при включении прибора - 80 mV
ЛИНЕЙН. ЛОГ. тумблер	Переключение линейного и логарифмического масштабов	ЛИНЕЙН.
ЧАСТОТА kHz ТОЧНО ручка	Точная установка центральной частоты настройки	
ЧАСТОТА kHz ГРУБО ручка	Установка центральной частоты настройки во всем диапазоне блока	
ОБЗОР kHz/ДЕЛЕН. ручка	Переключение полос обзора от 0,05 до 5 кГц	
S/ДЕЛЕН. переключатель	Переключение скоростей развертки от 0,02 до 10 с. В положении МАКС, скорость развертки не менее 30 с	
РУЧНАЯ ручка	Ручная развертка. В положении АРТ переключателя РАЗВЕРТКА ручка РУЧНАЯ определяет положение яркостной сетки с учетом частоты в месте положения метки	
ручка	Регулировка яркости луча на экране ЭЛП	
ручка	Фокусировка луча	
ручка	Регулировка освещенности масштабной сетки	
ручка	Стирание записи	
кнопка	Включение режима с длительной памятью	
ДЛИТ. кнопка	Включение режима с периодической памятью	
ПЕРИОДИЧ. кнопка	Включение осциллографического режима	при включении и выключении прибора - нажата
ОТКЛ. кнопка	Включение осциллографического режима	
СЕТЬ тумблер	Включение прибора	

Приложение 1  
Значения функций Бесселя  $J_0(\beta) - J_7(\beta)$

$\beta$	$J_0(\beta)$	$J_1(\beta)$	$J_2(\beta)$	$J_3(\beta)$	$J_4(\beta)$	$J_5(\beta)$	$J_6(\beta)$	$J_7(\beta)$
0	1	0	0	0	0	0	0	0
.1	.997	.050	.001	0	0	0	0	0
.2	.990	.099	.005	0	0	0	0	0
.3	.977	.148	.011	.0006	0	0	0	0
.4	.960	.196	.020	.0013	0	0	0	0
.6	.912	.287	.044	.0044	.0003	0	0	0
.8	.846	.369	.076	.0102	.001	0	0	0
1	.765	.440	.115	.0196	.0025	.0002	0	0
1.2	.671	.498	.159	.0329	.0050	.0006	0	0
1.4	.567	.542	.207	.0505	.0091	.0012	0	0
1.6	.455	.570	.257	.0725	.015	.0024	0	0
1.8	.340	.581	.306	.0988	.0232	.0043	0	0
2	.224	.577	.353	.1289	.0339	.0070	.0012	.0002
2.2	.110	.556	.395	.1623	.0476	.0109	.0021	.0003
2.4	.002	.520	.431	.1981	.0643	.0162	.0034	.0006
2.6	-.097	.471	.459	.2353	.0840	.0232	.0035	.0010
2.8	-.185	.410	.478	.2727	.1067	.0321	.0079	.0016
3	-.260	.339	.486	.3091	.1320	.0430	.0114	.0025
3.2	-.320	.261	.483	.3430	.1597	.0562	.0160	.0038
3.4	-.364	.179	.470	.3734	.1892	.0718	.0219	.0056
3.6	-.392	.095	.445	.3988	.2198	.0897	.0293	.0080
3.8	-.402	.013	.409	.4180	.2507	.1098	.0383	.0112
4	-.397	-.066	.364	.4302	.2811	.1321	.0491	.0152
4.2	-.376	-.139	.310	.4344	.3100	.1561	.0617	.0202
4.4	-.342	-.203	.250	.4301	.3364	.1816	.0763	.0264
4.6	-.296	-.257	.185	.4171	.3594	.2080	.0927	.0340
4.8	-.240	-.298	.115	.3952	.3780	.2347	.1110	.0429
5	-.177	-.328	.0466	.3648	.3912	.2611	.1310	.0534
5.1	-.143	-.335	.0203	.3455	.3948	.2728	.1417	.0594
5.2	-.11	-.343	-.022	.3265	.3985	.2865	.1525	.0654
5.4	-.041	-.345	-.087	.2811	.3991	.3101	.1751	.0791
5.5	-.007	-.34	-.115	.255	.3957	.3205	.1867	.0862
5.6	.027	-.334	-.146	.2298	.3926	.3310	.1986	.0945

Множитель  $\sqrt{2/T}$  принято включать в коэффициенты  $a_k$ , а ряд (??) записывать в виде

$$x(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_{kC} \cos k \frac{2\pi}{T} t + c_{kS} \sin k \frac{2\pi}{T} t \right), \quad (3)$$

где

$$c_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad (4)$$

$$c_{kC} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos k\omega t dt, \quad (5)$$

$$c_{kS} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin k\omega t dt. \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем  $\omega T = 2\pi/T$  – угловая частота основной гармоники периодической функции  $x(t)$ .

Ряд (??) называется *рядом Фурье в тригонометрической форме*. Для целей спектрального анализа такое разложение не удобно, так как каждой частоте  $k\omega t$  отвечают одновременно две составляющие ряда, и необходимо устройство, способное их различать.

Более рациональной является так называемая *амплитудно-фазовая формулировка рядов Фурье*.

**Амплитудно-фазовая формулировка ряда Фурье.** Каковы бы не были коэффициенты Фурье  $c_{kC}$  и  $c_{kS}$ , можно найти такое  $c_k > c_{kC}$ ,  $c_{kS}$  и такой угол  $\varphi_k$ , чтобы выполнялись соотношения

$$c_{kC} = c_k \cos \varphi_k, \quad c_{kS} = c_k \sin \varphi_k. \quad (7)$$

Подставляя (??) в (??), получим:

$$x(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega t - \varphi_k). \quad (8)$$

Это тоже тригонометрический ряд Фурье, но его каждая гармоническая составляющая представлена *амплитудой*  $c_k = \sqrt{c_{kC}^2 + c_{kS}^2}$  и *начальной фазой*  $\varphi_k$ .

Совокупность гармоник, на которые разлагается функция  $x(t)$  называется *спектром периодического колебания  $x(t)$* . Совокупности амплитуд  $c_k$  и начальных фаз  $\varphi_k$  составляют *амплитудный и фазовый спектры  $x(t)$* . Они изображаются в виде *спектральных диаграмм* (рис. 1). При этом каждой гармонике сигнала соответствует вертикальный отрезок, длина которого

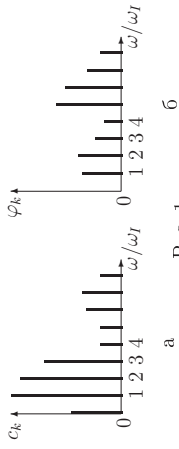


Рис. 1

пропорциональна амплитуде или начальной фазе, а местоположение на горизонтальной оси соответствует частоте.

- *Интерпретируемые периодические сигналы [2, с.30] можно представить математической моделью в виде суммы постоянной составляющей и гармонических колебаний кратных частот.*
- Спектральные линии периодического сигнала образуют *эвидентный линейчатый спектр* с частотами  $k\omega_1$ .
- Тригонометрический ряд (??) представляет *вещественные модели* реальных периодических сигналов.
- Структура спектров зависит от симметрии функций [2, с.29].

**Представление ряда Фурье в комплексной форме** Представляя каждую гармоническую функцию в (??) суммой комплексно-сопряженных слагаемых, получим:

$$x(t) = \frac{1}{2} \left( c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j(k\omega_1 t - \varphi_k)} + c_k e^{-j(k\omega_1 t - \varphi_k)} \right). \quad (9)$$

Если ввести комплексные амплитуды гармоник  $\dot{C}_k = c_k e^{-j\varphi_k/2}$  и  $\dot{C}_k^* = c_k e^{j\varphi_k/2}$ , то уравнение (??) можно представить в виде:

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \dot{C}_k^* e^{jk\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (10)$$

где  $\dot{C}_0 = c_0/2$ , а  $\dot{C}_{-k} = \dot{C}_k^*$ ,

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) (\cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (11)$$

Комплексный ряд (??) содержит гармоники с отрицательными частотами. Они не имеют физического смысла и порождены комплексным представлением гармонических колебаний [2, с.31].

Формулы (??) и (??) часто называют *парой преобразований Фурье*, так как первая из них позволяет определить совокупность комплексных амплитуд по заданной функции  $x(t)$  (прямое преобразование Фурье  $\mathbf{F}$ ), а вторая

ных и треугольных напряжений (выход встроенного генератора соединяется с разъемом "MOD" на задней стенке генератора GFG-8219A, а сам генератор устанавливается в режим внешней амплитудной модуляции (кнопки "MOD ON/OFF" и "MOD EXT").

Установить частоту встроенного генератора равной 500 Гц. Изменяя его выходное напряжение и регулируя коэффициент модуляции в генераторе GFG-8219A, получить АМ-колебания с глубиной модуляции 50% и 100%.

Зарисовать полученные осциллограммы и спектрограммы. Сравнить спектры, полученные в данном п. и п. А3, и используя [2, с.80-81], объяснить полученные результаты.

3\*. Произвести аналогичные измерения при полигармонической амплитудной модуляции (прямоугольное и треугольное напряжения) негармонической несущей (прямоугольной или треугольной формы). Для этого установить частоту несущего сигнала 1.5 кГц и частоту модулирующего сигнала 150-160 Гц.

Зарисовать полученные осциллограммы и спектрограммы. Сравнить спектры, полученные в данном п. и п. А3, и используя [2, с.80-81], объяснить полученные результаты.

## В. Исследование спектров частотно-модулированных сигналов

В работе предполагается исследовать только однонаправленные ЧМ-колебания. Наблюдать осциллограммы ЧМ-сигналов не представляется возможным, поэтому следует ограничиться спектральными измерениями.

1. Установить GFG-8219A в режим частотной модуляции и частоту несущего колебания 4-5 кГц. Изменяя девиацию частоты с помощью регулятора "MOD/DEPTH - SWEEP/RATE", установить по спектрограмме малый индекс частотной модуляции  $\beta$ . Зарисовать полученные спектрограммы и, используя таблицу функций Бесселя (Приложение 1), объяснить, до каких значений  $\beta$  можно считать малым.

2. Увеличивая девиацию частоты, получить и зарисовать спектр для случая, когда амплитуда несущей частоты обращается в нуль. Произвести измерение боковых частот и их относительных амплитуд и сравнить с теоретически рассчитанными по известному индексу модуляции. Рассчитать ширину спектра и девиацию частоты при частоте модуляции 400 Гц.

3\*. Произвести аналогичные расчеты, измерения и зарисовки спектров для случая еще больших индексов модуляции, при которых обращаются в нуль амплитуды первой, второй и т.д. боковых частот (в том числе повторного обращения в нуль несущей). Каждый раз подсчитывать число всех отчетливо наблюдаемых спектральных линий (эффективных боковых колебаний) по одну и другую сторону от несущей и, сравнивая это число с индексом модуляции, проверять известное теоретическое соотношение между ними. Для каждого значения индекса модуляции рассчитывать эффективную полосу спектра (ширину практически получаемого спектра).

диапазона и сопоставить ее с показаниями электронного частотомера генератора. Объяснить источники расхождений в результатах измерений.

Для измерения частоты спектральной линии переключателем РАЗВЕРТКА установить в положение РУЧНАЯ, а ручку S/ДЕЛЕН: РУЧНАЯ вращать до совпадения со спектральной линией. Частота спектральной линии фиксируется на экране дисплея.

### А. Исследование спектров периодических сигналов

1. Перевести GFG-8219A в режим прямоугольных сигналов. Установить частоту повторения импульсов в 1 кГц и используя ручку генератора "DUTY ADJ" для изменения скважности, пронаблюдать форму и спектр сигнала при скважности 2, 3, 4 и 5.

2. Измерить спектр (амплитуды и частоты всех отчетливо наблюдаемых гармоник) и для скважности, указанной преподавателем, сопоставить наблюдаемые измерения и рассчитанного спектров. Объяснить, какие гармоники в спектре должны иметь нулевую амплитуду и почему?

3. Перевести GFG-8219A в режим треугольных сигналов и произвести аналогичные измерения для частоты повторения в 1 кГц. Используя ручку генератора "DUTY ADJ", превратить треугольный сигнал в пилообразный. Объяснить, как трансформируется спектр треугольного сигнала при превращении его в пилообразный.

### Б. Исследование спектров амплитудно-модулированных сигналов

Одновременное использование двух функциональных генераторов (GFG-8219A и встроенного в осциллограф) позволяет получить четыре различных вида амплитудной или частотной модуляции:

модуляция синусоидального колебания высокой частоты синусоидальным или несинусоидальным колебанием более низкой частоты (от встроенного в осциллограф генератора), модуляция несинусоидального (прямоугольного или треугольного) колебания высокой частоты синусоидальным или несинусоидальным колебанием более низкой частоты (от встроенного в осциллограф генератора).

1. Для исследования однотоновых АМ-колебаний достаточно установить на GFG-8219A синусоидальную форму сигналов, выбрать частоту несущей порядка 1-2 кГц, с помощью кнопки "MOD ON/OFF" задать режим внутренней амплитудной модуляции с частотой 400 Гц.

Зарисовать картины АМ-колебаний и их спектры для трех-четырёх значений коэффициента модуляции  $m$  (в том числе равного и большего 100%). Произвести измерение коэффициентов модуляции по осциллограмме и спектрограмме для каждого значения  $m$ . Вычислить ширину спектра для различных коэффициентов модуляции. Объяснить, как изменяется форма и спектр колебания при перемодуляции, что происходит с фазой несущего колебания при перемодуляции.

2. Произвести аналогичные измерения для многократных АМ-сигналов, используя в качестве полигармонического управляющего (модулирующего) встроенный генератор осциллографа в режиме генерации прямоуголь-



Рис. 2

– найти  $x(t)$  по заданному множеству комплексных амплитуд гармоник (обратное преобразование Фурье  $\mathbf{F}^{-1}$ ). Чтобы подчеркнуть дуальность преобразований Фурье, в литературе (особенно зарубежной) вместо  $\dot{C}_k$  вводят дискретно-определенные функции  $\dot{X}(k)$  или просто  $X(k)$ . Тогда

$$\dot{X}(k) = \mathbf{F}[x(t)] \quad x(t) = \mathbf{F}^{-1}[\dot{X}(k)].$$

Совокупность комплексных амплитуд гармоник  $\dot{C}_k$  называется *комплексным спектром периодического сигнала*  $x(t)$ .

Комплексный спектр можно изобразить в виде единой спектральной диаграммы, если над вертикальными отрезками амплитудного спектра указать численные значения начальных фаз гармоник.

**Пример. Спектр последовательности прямоугольных видеоимпульсов** (рис. 3) задана аналитическим выражением:

$$x(t) = \begin{cases} E, & nT - \tau/2 < t < nT + \tau/2 \\ 0, & nT + \tau/2 < t < (n+1)T - \tau/2, \end{cases} \quad (12)$$

где  $E$  – амплитуда, а  $\tau$  – длительность импульсов.

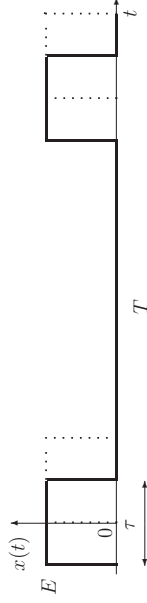


Рис. 3  
Подставляя  $x(t)$  в (?), получим

$$\begin{aligned} C_0 &= E \frac{\tau}{T}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-jk\omega t} dt = \frac{E}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega t} \tau/2}{-jk\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= \frac{E}{-jk\omega T} (e^{-jk\omega \tau/2} - e^{jk\omega \tau/2}) = E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega \tau/2}{k\omega \tau/2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\omega_1 = 2\pi/T$  – частота основной (первой) гармоники  $x(t)$ .

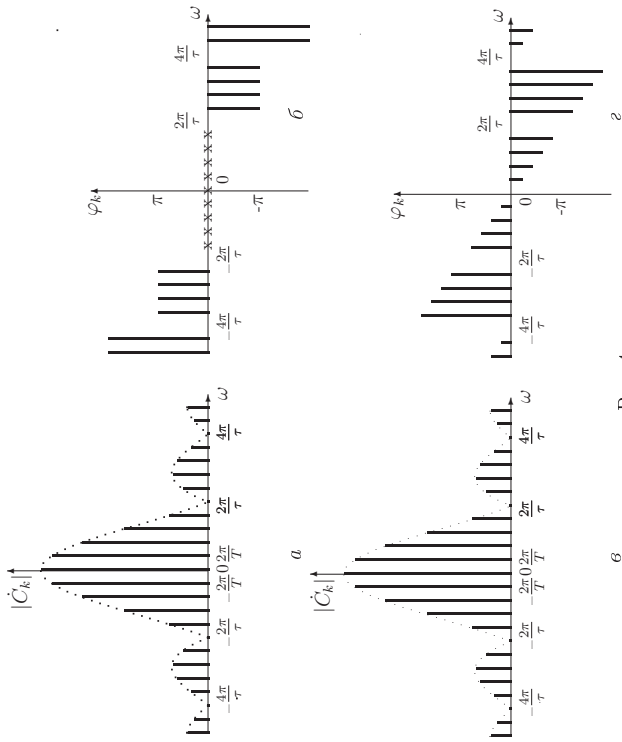


Рис. 4

Амплитудный и фазовый спектры рассматриваемой последовательности импульсов, т.е. зависимости амплитуд и фаз  $\hat{C}_k$  от частот гармоник, представлены на рис. 2.5.а и 2.5.б соответственно.

С учетом (?) сигнал  $x(t)$  можно представить в виде следующего ряда Фурье:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_1 \tau / 2}{k\omega_1 \tau / 2} e^{jk\omega_1 t} = E \frac{\tau}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} 2E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_1 \tau / 2}{k\omega_1 \tau / 2} \cos k\omega_1 t = \frac{E}{q} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi/q}{k\pi/q} \cos k\omega_1 t \right), \quad (14)$$

где величина  $q = T/\tau$  характеризует длительность паузы между импульсами и называется *скважностью последовательности* (спектральные диаграммы рис. 4 построены для скважности 5).

Если фронт импульса совпадает с началом отсчета времени (пунктирная кривая на рис. 3), то

$$x(t) = \begin{cases} E, & nT < t < nT + \tau \\ 0, & nT + \tau < t < (n+1)T, \end{cases} \quad (15)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} E e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{E}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega_1 \tau} - 1}{-jk\omega_1} = \frac{E}{-jk\omega_1 T} (e^{-jk\omega_1 \tau} - 1) =$$

ручка **ВИДЕОФИЛЬТР – ВЫКЛ.**;  
ручка **НОМИНАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ** – 80 mV (внешний диск в крайнем левом, внутренний переключатель – в крайнем правом положении). Остальные органы могут находиться в произвольном положении.

2. Включить тумблер **СЕТЬ**, подключить источник сигнала к разьему 0.01 - 60 kHz и произвести предварительную настройку анализатора спектра. Для этого  
а) исходя из частотного диапазона исследуемого сигнала, установить ручку **ОБЗОР kHz/ДЕЛЕН** в положение 1 или 2. При этом шкала ЭЛТ, имеющая около 10 делений, будет охватывать диапазон в 10 или 20 кГц соответственно;

б) переключатель **РАЗВЕРТКА** установить в положение **РУЧНАЯ**

ручку **S/ДЕЛЕН**, **РУЧНАЯ** установить в крайнее левое положение и вращая ручку **ЧАСТОТА kHz**, **ГРУБО** и **ТОЧНО** задать частоту, соответствующую левому краю диапазона, затем ручку **S/ДЕЛЕН**. **РУЧНАЯ** установить в крайнее правое положение и по дисплею частотмера определить наибольшую частоту установленного диапазона<sup>3</sup>;

г) переключатель **ПОЛОСА Hz** установить в положение 10, 30 или 100 Гц<sup>2</sup>;

д) переключатель **S/ДЕЛЕН** установить в положение 0.2, 0.5 или 1 с<sup>3</sup>;

е) ручку **РАЗВЕРТКА** установить в положение **АВТ.**, включить кнопку **ПАМЯТЬ** в положение **ПЕРИОДИЧ** и установить минимальную яркость, при которой отчетливо виден спектр процесса;

ж) остальные ручки анализатора спектра в процессе работы желательно не использовать. Амплитуду спектральных линий рекомендуется регулировать, изменяя величину выходного сигнала генератора GFG-8219A.

**Внимание !!**

**Во избежание повреждения ЭЛТ включать кнопки ПАМЯТЬ только при минимальной яркости луча (ручка регулировки яркости в крайнем левом положении), а затем устанавливать оптимальную яркость. В режиме ПАМЯТЬ работать со временем развертки не менее 0.1 S/ДЕЛЕН. При переходе из режима ПАМЯТЬ ОТКЛ. в режим ПЕРИОДИЧ или ДЛИТ необходимо сначала нажать кнопку ДЛИТ, стереть запись кнопкой ×, а затем переключиться в режим ПЕРИОДИЧ.**

3. Подключить источник анализируемого сигнала (генератор GFG-8219A) через коаксиальный тройник ко входам осциллографа и анализатора спектра и проводить одновременно все измерения формы сигнала и его спектра.

4. Установить на GFG-8219A синусоидальную форму сигналов и, плавно изменяя частоту сигнала от 100 Гц до 10 кГц, наблюдать форму сигнала и его спектр. Измерить частоту сигнала в трех-четыре точках

<sup>1</sup>Вращение ручек **ЧАСТОТА kHz**, **ГРУБО** и **ТОЧНО** вызывает изменение частоты генератора. При вращении из крайнего левого положения частота сначала уменьшается ( $f_r < f_{пр}$ ), а затем начинает нарастать ( $f_r > f_{пр}$ ). Поэтому для задания конечного значения частоты на левом краю диапазона необходимо следить за тем, чтобы вращение ручек по часовой стрелке вызвало рост частоты на дисплее.

<sup>2</sup>При этом изменяется полоса пропускания резонансного усилителя. Узкая полоса обеспечивает высокое частотное разрешение, но амплитуды спектральных линий уменьшаются. При широкой полосе (300 Гц) в полосу пропускания могут попадать одновременно 2-3 спектральных линии (проверить).

<sup>3</sup>Так регулируется скорость развертки или период сканирования частоты (на 10 делений шкалы соответственно 2, 5 или 10 с). Чем медленнее развертка, тем продолжительнее могут быть переходные процессы в резонансном усилителе и, следовательно, тем уже может быть его полоса пропускания

где  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  - условный номер гармоники. Вычисление по этой формуле связано с проведением  $N^2$  операций сложения и умножения. Для ускорения вычислений были предложены специальные алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ). Все они используют группировку идентичных членов.

С помощью схемы выборки-хранения сигнал разбивается на одинаковые интервалы, преобразуется в цифровой код и записывается в памяти компьютера, пока не будет достигнут заданный размер выборки. Затем процессор выполняет БПФ, переводя точки из временной области памяти в частотную, где и формируются значения  $C_n$ .

Цифровые анализаторы спектра отличаются высоким быстродействием, так как одновременно вычисляют значения для всех частот на основе единой последовательности входных данных.

## Экспериментальная часть

### Экспериментальная установка

Экспериментальная установка состоит из анализатора спектра СК4-56, функционального генератора FFG-8219A и осциллографа GOS-620FG.

Анализатор спектра СК4-56 построен по схеме сканирующего супергетеродина прибора и предназначен для исследования амплитудных спектров сигналов в диапазоне до 60 кГц (вход 0.01 – 60 kHz).

Функциональный генератор FFG-8219A генерирует периодические сигналы синусоидальной, треугольной или прямоугольной формы в диапазоне частот от 0.3 Гц до 3 МГц, а также АМ- и ЧМ-колебания с помощью встроенного генератора гармонических колебаний с частотой 400 Гц или дополнительного (внешнего) генератора с произвольной формой колебаний и частотой до 1 МГц.

Осциллограф GOS-620FG обладает полосой пропускания до 20 МГц и позволяет наблюдать периодические сигналы и модулированные по амплитуде и частоте колебания с высоким разрешением по амплитуде и частоте. Кроме того, встроенный функциональный генератор может быть использован для построения модулированных колебаний с регулируемой частотой и формой управляющего сигнала.

### Порядок выполнения работы

1. Подготовить к работе анализатор спектра СК4-56. Для этого установить органы управления и контроля СК4-56 в следующие положения:  
 кнопка ПАМЯТЬ – ОТКЛ.;  
 ручка РАЗВЕРТКА – Ручн.;  
 ручка РУЧНАЯ – среднее положение;  
 ручка ОБЗОР kHz/ДЕЛЕН – 0.1;  
 ручка ПОЛОСА Hz – 30;  
 тумблер ЛИНЕЙН/ЛОГ. – ЛИНЕЙН.;  
 тумблер КАЛИБР.АМПЛ. – выключен;  
 ручка S/ДЕЛЕН. – 0.05;

$$= E \frac{\tau}{T} e^{-jk\omega\tau/2} \frac{\sin k\omega\tau/2}{k\omega\tau/2},$$

т.е.  $\varphi_k = -k\omega\tau/2$ , а  $x(t)$  принимает вид:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega\tau/2}{k\omega\tau/2} e^{jk(\omega t - \omega\tau/2)} =$$

$$= \frac{E}{q} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi/q}{k\pi/q} \cos(k\omega t - k\omega\tau/2) \right). \quad (16)$$

Таким образом, при задержке последовательности импульсов на  $\tau/2$  амплитудный спектр не изменяется (рис. 4,б), а трансформируется только фазовый спектр (рис. 4,в).

Проанализируем полученные результаты.

1. Отгибающая спектра согласно (16) определяется соотношением

$$\frac{2\tau}{T} \cdot \left| \frac{\sin k\omega\tau/2}{k\omega\tau/2} \right| = \frac{2}{q} \cdot \left| \frac{\sin k\pi/q}{k\pi/q} \right|, \quad (17)$$

имеет *лестничную ступицу* и принимает нулевые значения на частотах  $\omega = 2K\pi/\tau$  или на гармониках с номерами  $k = K \cdot q$ . Первый нуль ( $K = 0$ ) отгибающей спектра последовательности прямоугольных импульсов имеет круговую частоту  $\omega = 2\pi/\tau$ , следующий  $\omega = 4\pi/\tau$  и т.д., т.е. в нуль обращаются гармоники с номерами  $k = q, 2q, 3q, \dots$

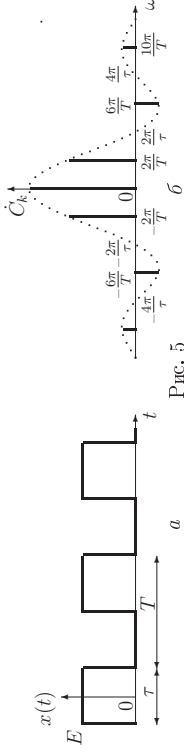


Рис. 5

В частности, при  $q = 2$  амплитуды всех четных гармоник обращаются в нуль, а амплитуды нечетных уменьшаются обратно пропорционально номерам гармоник (рис. 5,б). Последовательность прямоугольных импульсов, длительность  $\tau$  которых равна половине периода (рис. 5,а), называется *меандр*.

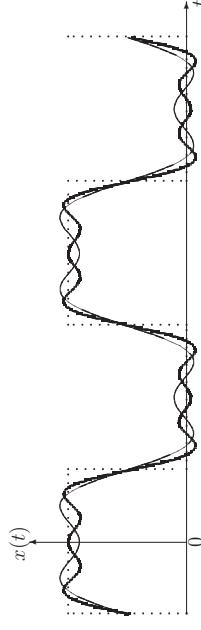


Рис. 6. Аппроксимация  $x(t)$  укороченным рядом Фурье:  $k = 3$  (голая линия),  $k = 5$  (п/ж линия) и  $k = 31$  (пунктирная линия)

Вклад различных составляющих в сигнал, аппроксимируемый рядом Фурье с конечным числом слагаемых, иллюстрирует рис. 6. При  $k = 3$  суммируются всего 5 гармоник и  $\hat{x}(t)$  сильно отличается от  $x(t)$ , но уже при  $k = 31$  функции  $\hat{x}(t)$  и  $x(t)$  практически не различимы.

2. Уменьшение длительности импульсов  $\tau$  сопровождается перемещением нулей огибающей в область все более высоких частот, т.е. *спектр расширяется*, а скорость убывания его амплитуд и сами амплитуды уменьшаются.

3. Увеличение  $T$  при неизменном значении  $\tau$  вызывает рост числа спектральных линий в каждом лепестке диаграммы и уменьшение расстояний между ними. При  $T \rightarrow \infty$ , т.е. при переходе от последовательности к одиночному импульсу, спектр *из дискретного превращается в непрерывный, состоящий из бесконечно большого числа спектральных линий малой амплитуды* ( $|\dot{C}_k| \rightarrow 0$ ); *расположенные сколь угодно близко друг к другу*.

### Модулированные радиосигналы и их спектры

Сигналы, поступающие от источников сообщений, чаще всего являются низко-частотными и при передаче с помощью радиоволн их спектры переносятся в область высоких частот. Для этого достаточно изменить пропорционально передаваемому сообщению параметры высоко-частотного колебания, называемого *несущим*. В качестве несущих применяются непрерывные (аналоговые), импульсные или даже хаотические колебания. Чаще других используются однопериодные непрерывные сигналы, математической моделью которых является гармоническое колебание.

• Физический процесс изменения во времени одного или нескольких параметров несущего колебания в соответствии с передаваемым сообщением называется *модуляцией*.

Гармоническое несущее колебание

$$x_{\text{нес}}(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (18)$$

имеет три параметра: *амплитуду*  $A_m$ , *угловую частоту*  $\omega_0$  и *начальную фазу*  $\varphi_0$ . Управляя одним из них можно получить *три вида модуляции: амплитудно, частотно или фазовую* (в дальнейшем используются сокращенные обозначения АМ, ЧМ и ФМ).

Если при неизменных  $\omega_0$  и  $\varphi_0$  амплитуда колебания (??) изменяется по закону

$$A(t) = A_m + \Delta A s(t), \quad (19)$$

где  $s(t)$  – передаваемое сообщение, то колебание называется *амплитудно-модулированным*:

$$x_{\text{АМ}}(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = [A_m + \Delta A s(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (20)$$

Если при неизменных  $A_m$  и  $\omega_0$  текущая фаза колебания изменяется по закону

$$\Psi(t) = \Psi + \Delta \Psi s(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + \Delta \Psi s(t), \quad (21)$$

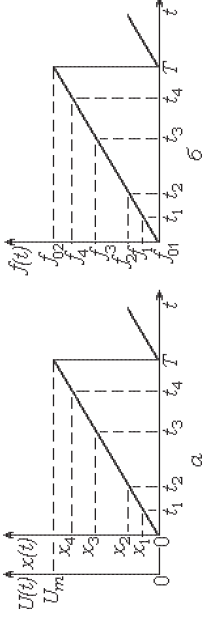


Рис. 14

из которых первые четыре с частотами  $f_{01} \leq f_1 < f_2 < f_3 < f_4 \leq f_{02}$  попадают в полосу пропускания входного усилителя и в качестве  $U_{\text{вх1}}$  поступают на первый вход перемножителя сигналов. На второй вход перемножителя поступает сигнал от гетеродина. ( $U_{\text{вх2}} = U_{\text{гр}} \cos 2\pi f_r(t)$ ). Тогда

$$U_{\text{вых}} = K[U_1 \cos 2\pi f_1 t + U_2 \cos 2\pi f_2 t + U_3 \cos 2\pi f_3 t + U_4 \cos 2\pi f_4 t] U_{\text{гр}} \cos 2\pi f_r(t).$$

Каждое произведение можно представить полусуммой косинусов суммы и разности аргументов, т.е. на вход резонансного усилителя поступают восемь гармонических сигналов, из которых четыре содержат разностные частоты (подчеркнуты):

$$U_{\text{вых}} = \frac{KU_{\text{гр}}}{2} [U_1 \cos 2\pi(f_1 + f_r(t))t + U_1 \cos 2\pi(f_1 - f_r(t))t + U_2 \cos 2\pi(f_2 + f_r(t))t + U_2 \cos 2\pi(f_2 - f_r(t))t + U_3 \cos 2\pi(f_3 + f_r(t))t + U_3 \cos 2\pi(f_3 - f_r(t))t + U_4 \cos 2\pi(f_4 + f_r(t))t + U_4 \cos 2\pi(f_4 - f_r(t))t].$$

Выходной сигнал ГПН медленно изменяется (период сканирования  $T$  в тысячи раз превышает периоды измеряемых сигналов), а луч медленно смещается вдоль оси  $x$ . Пока  $t < t_1$  ни одна из разностных частот не попадает в полосу пропускания резонансного келителя, и напряжение на  $y$ -входе ЭЛТ равно нулю. Когда  $t \rightarrow t_1$ , а  $f_1 - f_r(t_1) < f_{\text{гр}}$ , сигнал первой спектральной составляющей усиливается резонансным усилителем и создает вертикальное отклонение луча ЭЛТ  $y_1 \sim U_1$ . Чтобы отклонение луча происходило только вверх используется полупроводниковый диод.

Уже в следующий момент времени выходное напряжение резонансного усилителя снова обращается в нуль, и луч ЭЛТ не отклоняется в вертикальном направлении, прорисовывая горизонтальную прямую.

Таким же образом в моменты времени  $t_2, t_3$  и  $t_4$  возникают вертикальные отклонения в точках с координатами  $x_2, x_3$  и  $x_4$  длиной  $y_2 \sim U_2, y_3 \sim U_3$  и  $y_4 \sim U_4$ . При  $t = T$  ГПН возвращается в нулевое состояние, а гетеродин к частоте  $f_{01}$  и сканирование спектра повторяется.

**Цифровой анализатор спектра.** В основе работы анализатора лежит алгоритм, позволяющий вычислить обратное преобразование Фурье. Сигналы измеряются в дискретные моменты в течение ограниченного интервала времени, а коэффициенты ряда  $C_n$  вычисляются по формуле:

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j2\pi nm/N},$$



электронное сканирование частоты, то получим наиболее распространенный *сканирующий анализатор спектра* или *анализатор спектра с последовательным анализом*. Вместо одного перестраиваемого фильтра можно использовать набор фильтров с фиксированной полосой пропускания, настроенных на разные частоты и плотно (без зазоров) заполняющих частотный диапазон. Тогда получим *анализатор спектра с одновременным или параллельным анализом*, работающий в реальном времени [5].

С развитием компьютеров появился новый тип анализаторов спектра, основанных на дискретном преобразовании Фурье, - *цифровые анализаторы спектра*.

**Сканирующий супергетеродинный анализатор спектра.** Действие анализатора спектра напоминает работу обычного радиоприемника с электронной перестройкой, но только очень узкополосного.

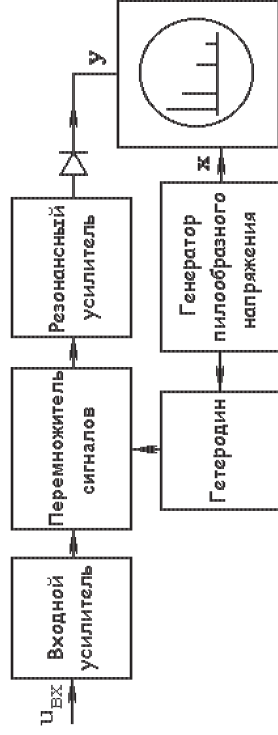


Рис. 13

Анализатор спектра (рис. 13) содержит: входной усилитель с полосой пропускания от  $f_{01}$  до  $f_{02}$ , определяющий полосу пропускания анализатора спектра, гетеродин - генератор с периодически изменяющейся частотой  $f_T(t)$ , генератор пилообразного напряжения (ГПН)  $U(t) = \frac{U_m}{T}t$  (рис. 14, а), задающий горизонтальное отклонение луча электронно-лучевой трубки (ЭЛТ) и управляющий сканированием частоты гетеродина (рис. 14, б):

$$f_T(t) = f_{01} + \frac{f_{02} - f_{01}}{T}t, \quad (0 \leq t \leq T, \quad f_{01} \leq f_T(t) \leq f_{02}),$$

перемножитель сигналов ( $u_{\text{вых}} = K u_{\text{вх1}} \cdot u_{\text{вх2}}$ ), где  $K$  - характеристический параметр перемножителя, узкополосный резонансный усилитель, настроенный на частоту  $f_{\text{пр}} \ll f_{01}$ , и индикатор спектра в виде ЭЛТ.

Пусть на вход анализатора спектра поступает сигнал, содержащий  $N$  гармонических составляющих:

$$u_{\text{вх}}(t) = \sum_{k=1}^N U_k \cos 2\pi f_k t,$$

то получаем *фазомодулированное* колебание:

$$x_{\text{ФМ}}(t) = A_m \cos [\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\Psi \cdot s(t)], \quad (22)$$

где  $\Delta\Psi$  - максимальное отклонение или *девиация* фазы колебания.

Наконец, когда постоянны  $A_m$  и  $\varphi_0$ , частота колебания удовлетворяет соотношению

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega s(t), \quad (23)$$

где  $\Delta\omega$  - максимальное отклонение (девиация) частоты несущего колебания, то сигнал называется *частотно-модулированным*.

Поскольку каждому значению  $\omega(t)$  соответствует определенное значение фазы сигнала, для текущей фазы  $\Psi(t)$  колебания с переменной частотой имеем

$$\Psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \varphi_0, \quad (24)$$

где  $\varphi_0$  - начальная фаза колебания, а  $x_{\text{ЧМ}}(t)$  принимает вид:

$$x_{\text{ЧМ}}(t) = A_m \cos \left( \int_0^t \omega(t) dt + \varphi_0 \right) = A_m \cos \left( \omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t s(t) dt + \varphi_0 \right). \quad (25)$$

Частотная и фазовая модуляции сопровождаются изменением одного и того же параметра - фазы (или угла)  $\Psi$  несущего колебания и поэтому часто рассматриваются в рамках единой *угловой модуляции*. Однако девиации фазы и частоты ЧМ- и ФМ-сигналов по-разному зависят от частоты модулирующего сигнала  $\Omega$ .

Ширина и структура спектров модулированных колебаний зависят и от спектральных характеристик передаваемого сообщения, и от вида модуляции. В реальных радиосистемах передаваемое сообщение непредсказуемо, а  $s(t)$  является случайной функцией. Ее спектр обычно занимает полосу частот от десятков герц до десятков килогерц. Это означает, что *наибольшая частота в спектре передаваемого сообщения значительно ниже частоты несущего колебания* и модулированное колебание можно считать *узкополосным* или даже *квазиузкополосным*.

#### Однотональные АМ-сигналы

Математической моделью АМ-сигнала служит выражение

$$x_{\text{АМ}}(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (26)$$

где  $A(t) = A_m(1 + m s(t))$  - огибающая АМ-сигнала;  $\omega_0$  и  $\varphi_0$  - круговая частота и начальная фаза высокочастотного заполнения;  $A_m$  - амплитуда несущего колебания в отсутствие модуляции;  $m = \Delta A / A_m$  - *коэффициент модуляции*.

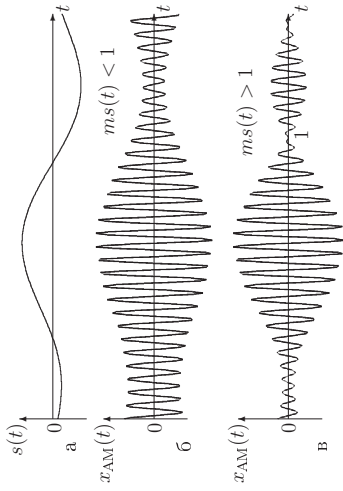


Рис. 7. Передаваемое сообщение (а) и АМ-колебание при  $|ms(t)| < 1$  (б) и  $|ms(t)| > 1$  (в), 1 – точка разрыва фазы несущего колебания

Пока  $|ms(t)| < 1$  (рис. 7, б), передаваемое сообщение вносится в  $x_{AM}(t)$  без искажений [2, с.76]. Исследование свойств и структуры АМ-процессов начнем с простейшей модели – однотонового АМ-колебания.

Пусть модулирующий сигнал  $s(t)$  является гармоническим:

$$s(t) = A_s \cos(\Omega t + \Phi_0),$$

Такое АМ-колебание называется *однотоновым*, а его мгновенное значение описывается соотношением

$$x_{AM}(t) = A_m (1 + m \cos(\Omega t + \Phi_0)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (27)$$

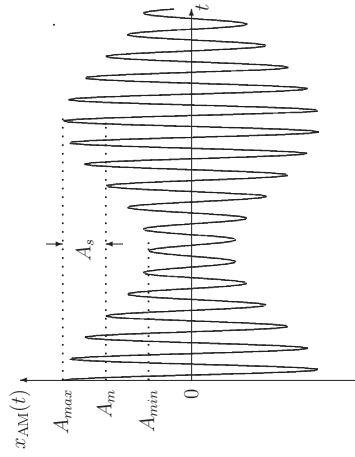


Рис. 8. Однотональное АМ-колебание

Спектральный состав АМ-сигнала получим, представляя произведение функций в (?) в виде суммы гармонических колебаний:

$$x_{AM}(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{mA_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0] + \frac{mA_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0]. \quad (28)$$

колебания, имеющих существенную для расчетов величину [2, с.84-86], и по структуре не отличается от спектра однотонового АМ-сигнала. При больших значениях  $\beta$  существенную для расчетов величину имеют функции Бесселя, порядок которых  $k$  не превышает  $\beta + 1$ , т.е. реальная ширина спектра УМ-сигнала составляет  $2(\beta + 1)\Omega = 2(\Delta\omega + \Omega) \simeq 2\Delta\omega = 2\beta\Omega$  и в  $2\beta$  раз превышает ширину спектра аналогичного однотонового АМ-сигнала. Спектры двух УМ-сигналов для  $A_m = 1$  при  $\beta = 1$  и  $\beta = 2.5$  представлены на рис. 12, а, б соответственно. Отметим, что амплитуда несущей может быть не только много меньше амплитуд боковых колебаний, но и при  $\beta = 2.405, 5.52, \dots$  (см. табл. 1) вообще отсутствует в спектре УМ-колебания.

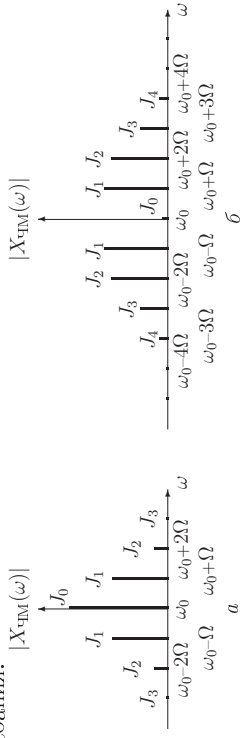


Рис. 12. Спектры УМ-сигналов при  $\beta = 1$  (а) и  $\beta = 2.5$  (б)

- Ширина спектра однотонового УМ-колебания при больших индексах модуляции близка к удвоенной девиации частоты и не зависит от частоты модулирующего сигнала.
- Одновременное присутствие многих составляющих, содержащих информацию о модулирующем сигнале, позволяет обеспечить высокую достоверность при передаче сообщений и осуществить высококачественное радиовещание, а постоянство амплитуды УМ-сигналов, точнее независимость амплитуды УМ-колебания от передаваемого сообщения, обеспечивает помехоустойчивость приема.
- Необходимая широкополосность УМ-сигналов может быть обеспечена только при достаточно высокой частоте несущего колебания, т.е. в области метровых или более коротких волн. Поэтому ЧМ-колебания (их проще создавать и демодулировать) используются при трансляции стереопередач в УКВ-диапазоне и звукового сопровождения телевизионных передач.

## Методика экспериментального исследования спектров радиосигналов и электронные приборы для спектрального анализа (анализаторы спектра)

Исследования частотных спектров сигналов выполняются с помощью электронных приборов, называемых *анализаторами спектра*.

В простейшем случае амплитуды различных частотных составляющих сигнала можно измерить с резонансным селективным вольтметром, переключая его частоту. Если его перестройку автоматизировать, используя

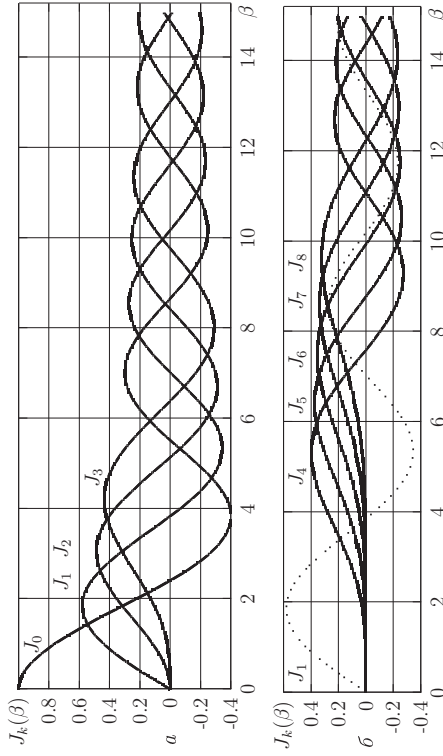


Рис. 11. Функции Бесселя нулевого – третьего порядка (а) и четвертого – восьмого порядка (б)

- Спектр даже однотонового модулированного по частоте (или в общем случае по углу) колебания содержит бесконечное число боковых гармоник, попарно симметричных относительно несущей частоты колебания. У однотоновых колебаний спектр эквидистантный. Амплитуды всех составляющих, в том числе и несущей, пропорциональны значениям функций Бесселя.

Значения  $\beta$ , при которых функции Бесселя нулевого, первого и второго порядка обращаются в нуль, представлены в табл.1, а значения функций Бесселя  $J_0(\beta)$ ,  $J_1(\beta) - J_6(\beta)$  при фиксированных значениях  $\beta$  – в табл. 2.

Таблица 1  
Значения первых пяти корней функций Бесселя  $J_0(\beta)$ ,  $J_1(\beta)$  и  $J_2(\beta)$

$\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$
$J_0(\beta)$	2.405	5.52	8.65	11.79	14.93
$J_1(\beta)$	3.83	7.01	10.17	13.31	16.47
$J_2(\beta)$	5.13	8.41	11.62	14.79	17.96

Таблица 2  
Значения функций Бесселя  $J_0(\beta)$ ,  $J_1(\beta) - J_6(\beta)$  при фиксированных значениях  $\beta$

$\beta$	$J_0(\beta)$	$J_1(\beta)$	$J_2(\beta)$	$J_3(\beta)$	$J_4(\beta)$	$J_5(\beta)$	$J_6(\beta)$
$\beta = 0.5$	0.938	0.242	0.03	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$\beta = 1.0$	0.765	0.44	0.114	0.02	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$\beta = 1.5$	0.511	0.558	0.232	0.06	0.008	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$\beta = 2.0$	0.224	0.576	0.352	0.13	0.034	0.007	$\rightarrow 0$
$\beta = 2.5$	-0.04	0.497	0.446	0.241	0.097	0.29	0.007

Как следует из табл. 2, при  $\beta \leq 0.5$  амплитудный спектр ЧМ-сигнала (предлагается считать самостоятельно) содержит всего 3 гармонических

Итак, однотоновое АМ-колебание состоит из трех гармонических колебаний с близкими частотами. Ширина его спектра равна удвоенной частоте модуляции. Первое слабое в правой части (??) является несущим колебанием. Два других колебания возникают в результате модуляции. Они имеют равные амплитуды, пропорциональные  $m$ , симметричные относительно несущего колебания фазы  $-\Phi_0$  и  $+\Phi_0$  и частоты  $\omega_0 - \Omega$  и  $\omega_0 + \Omega$ , называемые *нижней и верхней боковыми частотами*. Формулу (??) можно интерпретировать графически [2, с.78].

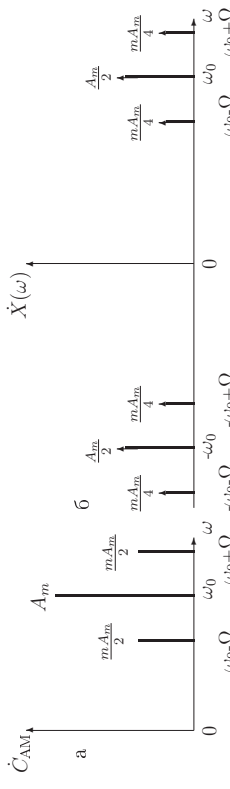


Рис. 9. Вещественный (а) и комплексный (б) спектры однотонового АМ-сигнала

Вещественный спектр однотонового АМ-сигнала в общем случае – линейчатый спектр квазипериодического процесса [2, с.11]. Только в тех случаях, когда  $\omega_0/\Omega = N$ , где  $N$  – целое число, процесс становится периодическим, а линии спектра –  $(N - 1)$ -й,  $N$ -й и  $(N + 1)$ -й гармониками частоты модуляции.

**Многотональные АМ-колебания** Пусть модулирующий сигнал  $s(t)$  является полигармоническим (многотональным) колебанием:

$$s(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i).$$

Спектр  $s(t)$  может быть неэквидистантным. Если последовательность частот  $\Omega_i$  упорядочена так, что  $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_N$  (рис. 5.5,а), то мгновенное значение многотонального АМ-колебания описывается соотношением

$$x_{AM}(t) = A_m \left( 1 + \sum_{i=1}^N m_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i) \right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (29)$$

где  $m_i = A_i/A_m$  – парциальные (частные) коэффициенты модуляции. Тогда

$$x_{AM}(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{i=1}^N \frac{m_i A_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_i)t + \varphi_0 - \Phi_i] + \sum_{i=1}^N \frac{m_i A_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_i)t + \varphi_0 + \Phi_i]. \quad (30)$$

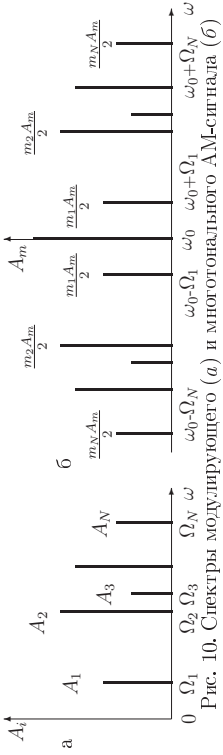


Рис. 10. Спектры модулирующего (а) и многотонального АМ-сигнала (б)

Спектр многотонального АМ-сигнала содержит две группы колебаний с верхними от  $(\omega_0 + \Omega_1)$  до  $(\omega_0 + \Omega_N)$  и нижними от  $(\omega_0 - \Omega_N)$  до  $(\omega_0 - \Omega_1)$  боковыми частотами. При этом структуры спектров верхней боковой полосы частот и модулирующего сигнала идентичны, а спектральные компоненты верхней боковой полосы частот получают при зеркальном отражении боковых частот расположения попарно-симметрично относительно частот несущего колебания. Полный спектр содержит  $2N + 1$  составляющих, а его ширина определяется величиной максимальной частоты в спектре модулирующего сигнала и равна  $2\Omega_N$ .

Частным случаем многотонального АМ-сигнала является высокочастотное колебание, промодулированное по амплитуде последовательностью прямоугольных импульсов [2, с. 80-81].

#### Однотональные ЧМ-сигналы

Пусть  $s(t) = \cos(\Omega t + \Phi_0)$ . Тогда для мгновенных значений ЧМ-сигнала получим выражение

$$\begin{aligned} x_{\text{ЧМ}}(t) &= A_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\omega \int_0^t \cos(\Omega t + \Phi_0) dt] = \\ &= A_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \beta \sin(\Omega t + \Phi_0)]. \end{aligned} \quad (31)$$

Величина  $\beta = \Delta\omega/\Omega$  представляет *девиацию фазы ЧМ-сигнала* и называется *индексом частотной модуляции* однотонального ЧМ-сигнала.

Не нарушая общности анализа, положим  $\Phi_0 = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} x_{\text{ЧМ}}(t) &= A_m \cos[\beta \sin \Omega t] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \\ &- A_m \sin[\beta \sin \Omega t] \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (32)$$

Функции  $\cos[\beta \sin \Omega t]$  и  $\sin[\beta \sin \Omega t]$  – периодические функции с периодом  $T/4 = \pi/2\Omega$ , и их можно разложить в ряды Фурье. При разложении функции  $\cos[\beta \sin \Omega t]$  амплитуды нечетных гармоник обращаются в нуль, а для  $C_{2k}$  получаем выражение:

$$C_{2k} = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \cos(\beta \sin \Omega t) \cos 2k\Omega t dt, \quad (33)$$

которое совпадает с известной формулой интегрального представления функций Бесселя четного порядка  $J_{2k}(\beta)$ . Таким образом, разложение функции  $\cos[\beta \sin \Omega t]$  имеет вид

$$\cos[\beta \sin \Omega t] = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cos(2k\Omega t). \quad (34)$$

При разложении функции  $\sin[\beta \sin \Omega t]$  в нуль обращаются амплитуды четных гармоник, а для  $C_{2k+1}$  имеем

$$C_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \sin(\beta \sin \Omega t) \sin(2k+1)\Omega t dt = J_{2k+1}(\beta).$$

В результате получаем следующее разложение функции  $\sin[\beta \sin \Omega t]$ :

$$\sin[\beta \sin \Omega t] = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \sin[(2k+1)\Omega t]. \quad (35)$$

Подставляя (??) и (??) в (??), получим:

$$\begin{aligned} x_{\text{ЧМ}}(t) &= A_m \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cos(2k\Omega t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ &+ A_m \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \sin[(2k+1)\Omega t] \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (36)$$

После внесения  $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  и  $\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$  под знаки сумм и использования тригонометрических уравнений

$$\begin{aligned} \cos(2k\Omega t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) &= \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 - 2k\Omega t) + \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + 2k\Omega t); \\ \sin[(2k+1)\Omega t] \sin(\omega_0 t + \varphi_0) &= \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 - (2k+1)\Omega t) - \\ &- \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + (2k+1)\Omega t) \end{aligned}$$

разложение в спектр однотонального ЧМ-сигнала с произвольным индексом модуляции принимает окончательный вид

$$x_{\text{ЧМ}}(t) = A_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cos[(\omega_0 + k\Omega)t + \varphi_0]. \quad (37)$$

При выводе этого соотношения было также учтено, что  $J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta)$ , т.е.  $J_{-2k}(\beta) = J_{2k}(\beta)$ ,  $J_{-(2k+1)}(\beta) = -J_{2k+1}(\beta)$ .