

5. Исследовать прохождение прямоугольных импульсов через RCL -цель. Для этого установить переключатель Π_1 в положение RCL и зарисовать осциллограммы напряжений на резисторе, конденсаторе и катушке индуктивности (переключатель Π_4 соответственно в положениях R , C или L) при двух положениях переключателя Π_5 - $R < 2\rho$ и $R > 2\rho$. Рассчитать $\rho = \sqrt{L/C}$ и объяснить полученные осциллограммы.

В положении R для сопоставления входного и выходного сигналов можно использовать второй канал осциллографа.

6. Для указанного преподавателем задания рассчитать спектральным и операторным методами и построить на одном рисунке в одинаковом масштабе зависимости U_R , U_L или U_C от времени. Объяснить различия в зависимости, полученных спектральным и операторным методами. На том же рисунке изобразить экспериментально полученную зависимость. Объяснить различие осциллограммы и результатов расчета спектральным и операторным методами.

Задание 1: Рассчитать спектры напряжений U_R и U_C и получить спектральным и операторным методами временные изменения этих напряжений в RC -цепи при $R = 5$ кОм.

Задание 2: Рассчитать спектры напряжений U_R и U_C и получить спектральным и операторным методами временные изменения этих напряжений в RC -цепи при $R = 300$ кОм.

Задание 3: Рассчитать спектры напряжений U_R и U_L и получить спектральным и операторным методами временные изменения этих напряжений в RL -цепи при $R = 24$ кОм.

Задание 4: Рассчитать спектры напряжений U_R и U_L и получить спектральным и операторным методами временные изменения этих напряжений в RL -цепи при $R = 51$ Ом.

***Задание 5:** Рассчитать спектры напряжений U_R в аperiodическом и колебательном режимах RCL -цепи и получить спектральным и операторным методами временные изменения этого напряжения в аperiodическом и колебательном режимах.

***Задание 6:** Рассчитать спектры напряжения U_C в аperiodическом и колебательном режимах RCL -цепи и получить спектральным и операторным методами временные изменения этого напряжения в аperiodическом и колебательном режимах.

***Задание 7:** Рассчитать спектры напряжения U_L в аperiodическом и колебательном режимах RCL -цепи и получить спектральным и операторным методами временные изменения этого напряжения в аperiodическом и колебательном режимах.

Для расчета на компьютере составить программы расчета:

- 1) амплитудного спектра и временной реализации входного сигнала,
- 2) коэффициентов передачи цепи $K(j\omega)$. Обратить особое внимание на точность вычисления $K(0)$ и фазовой характеристики цепи,
- 3) амплитудного и фазового спектров выходного сигнала,
- 4) временных реализаций выходных сигналов спектральным методом, временных реализаций выходных сигналов операторным методом.

Период колебания следует разделить на 20 равных частей. При расчете "вручную" можно ограничиться 10-ю членами рядов Фурье. При расчете на компьютере следует получить результаты для 10 и 100 членов ряда.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СИГНАЛОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ СПЕКТРАЛЬНЫМ И ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДАМИ (Прямоугольный импульс)

Учебное пособие для спецпрактикума по курсу "Теоретические основы радиоэлектроники"

Ц е л ь р а б о т ы: экспериментальное исследование и расчет спектральным и операторным методом преобразований периодической последовательности прямоугольных импульсов в линейных LCR -цепях.

Литература

1. Хохлов А.В. Теоретические основы радиоэлектроники. Саратов. Изд-во Саратов. ун-та, 2005.
2. Нефедов В.И. Основы радиоэлектроники и связи. М.: Вышш.шк., 2002.
3. Каяцкас А.А. Основы радиоэлектроники. М.: Вышш. шк., 1988.
4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Вышш.шк., 1983.
5. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. Л.: Энергия, 1972.

Контрольные вопросы

1. При каких условиях электрическая LCR -цель является линейной, при каких условиях - нелинейной?
2. Какова методика применения спектрального метода к анализу прохождения сигналов через линейные цепи?
3. Какова методика применения операторного метода к анализу прохождения сигналов через линейные цепи?
4. При каких соотношениях постоянной времени цепи и длительности импульса возможно дифференцирование (интегрирование) сигнала?
5. Каковы формы выходных сигналов, снимаемых с резистора, конденсатора и катушки индуктивности в RC - и RL -цепях при различных соотношениях длительности прямоугольного импульса и постоянной времени цепи?

Задания для самостоятельной работы

1. Вывести формулы (5), (6), (7), (8) и (11).
2. Вывести формулы для K_R и K_C в RC -цепи, для K_L и K_R в RL -цепи в спектральной и операторной форме.
3. Рассчитать спектр входного сигнала.
4. Для указанных преобразователей типа и параметров цепи рассчитать спектральный метод спектра выходного сигнала и $U_{\text{вых}}(t)$, а операторным методом – изображение выходного сигнала и $U_{\text{вых}}(t)$.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Цель или система называется *линейной*, если ее параметры не изменяются в ходе физических процессов, а сами процессы удовлетворяют принципу суперпозиции и описываются линейными дифференциальными или алгебраическими уравнениями.

Строго говоря, все физические системы нелинейны. Но в определенных границах изменения переменных, характеризующих физический процесс, реальную систему можно *линеаризовать*, т.е. представить линейной моделью. Простейшей и в то же время достаточно универсальной моделью линейной системы является четырехполюсник, в котором связь входных и выходных сигналов задана системным оператором \mathbf{T} .

$$x_{\text{вых}}(t) = \mathbf{T}x_{\text{вх}}(t), \quad (1)$$

где $x_{\text{вх}}(t)$ – сигнал на входе четырехполюсника (воздействие), $x_{\text{вых}}(t)$ – сигнал на его выходе (отклик или реакция системы).

Анализ физических процессов в линейных цепях и системах в конечном счете сводится к исследованию временных изменений откликов на импульсные или непрерывные воздействия в течение определенного времени (теоретически от нуля до ∞). Существуют различные методы описания и анализа систем во временной и частотной области [1, с.143-152; 4, с. 17-23, 247-260]. В лабораторной работе изучаются методы анализа линейных цепей в частотной области, основанные на спектральном и операторном представлении процессов прохождения сигналов.

Временные и частотные характеристики линейной цепи

Импульсной характеристикой линейной цепи или системы будем называть отклик $h(t)$ на элементарное воздействие в виде дельта-функции Дирака $\delta(t)$, а *переходной характеристикой* – отклик $g(t)$ на элементарное воздействие в виде функции Хевисайда $\sigma(t)$. Это временные характеристики линейной цепи или системы. Как известно, импульсная $h(t)$ и переходная $g(t)$ характеристики линейной цепи связаны соотношениями

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}, \quad g(t) = \int_{-\infty}^t h(t)dt. \quad (2)$$

единены в установке в виде ключных переключателей $\Pi_1 - \Pi_5$.

Переключатель Π_1 подключает первый канал осциллографа к мультиметру M или к элементам $RC-$, $RL-$, RC/L -цепи с помощью коаксиального разъема "ОЦ". Вторым канал осциллографа постоянно контролирует форму сигнала, поступающего на вход исследуемой цепи, и подключается к экспериментальной установке с помощью коаксиального разъема "П".

Переключатель Π_2 объединяет $S2.1$ и $S2.2$, а переключатель Π_3 используется для подключения первого канала осциллографа к резистору или реактивному элементу при исследовании $RC-$ и RL -цепи.

Переключатель Π_4 коммутирует выходные напряжения при исследовании RC/L -цепи и устанавливается в положение "d, f" при исследовании RC или RL -цепи. Наконец, переключатель Π_5 используется совместно с переключателем Π_1 при переходе от измерений RC -цепи к RL -цепи, а также для перехода от аperiodического режима к колебательному при исследовании RC/L -цепи.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с экспериментальной установкой, включить ее в сеть и снять осциллограмму входного сигнала – напряжения на выходе мультиметра. Для этого подключить вход осциллографа к коаксиальному разъему установки, переключатель **СЕТЬ** установить в положение **ВКЛ**, переключатели Π_1 и Π_4 - в положение "П".

Синхронизировать развертку осциллографа и измерить частоту повторения и скважность последовательности импульсов, вырабатываемых мультиметром M . Рассчитать длительность импульсов $t_{\text{и}}$ и период повторения последовательности T .

2. Изобразить рассчитанный спектр входного сигнала. Представить на одном рисунке в одинаковом масштабе полученную осциллограмму и результат расчета входного сигнала спектральным методом. Объяснить различие осциллограммы и результатов расчета входного сигнала.

3. Исследовать прохождение прямоугольных импульсов через RC -цепь. Для этого установить переключатели Π_1 и Π_5 в положение **РС**, Π_4 - в положение "d, f", а Π_3 в положение **Р**). Изменяя переключателем Π_2 сопротивление RC -цепи, зарисовать осциллограммы напряжений на резисторе. Перевести переключатель Π_3 - в положение **С** и изменения на сопротивлении RC -цепи, зарисовать осциллограммы напряжений на конденсаторе. Для каждого значения R вычислить отношение длительности импульсов $t_{\text{и}}$ к постоянной времени T и объяснить в отчете причины деформации импульсов в зависимости от постоянной времени цепи.

4. Исследовать прохождение прямоугольных импульсов через RL -цепь. С этой целью установить переключатели Π_1 и Π_5 в положение **RL**, а Π_4 - в положение "d, f". Изменяя переключателем Π_2 сопротивление RL -цепи, зарисовать осциллограммы напряжений на резисторе (переключатель Π_3 - в положении **Р**) и на катушке индуктивности (переключатель Π_3 - в положении **Л**). Для каждого значения R вычислить отношение длительности импульсов $t_{\text{и}}$ к постоянной времени T и объяснить в отчете по работе причины деформации импульса в зависимости от постоянной времени цепи.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

В лабораторной работе предполагается сопоставить напряжения, полученные на экспериментальной установке, с результатами расчета на микроЭВМ спектральным и операторным методами. В качестве измерительного прибора используется двухканальный осциллограф GOS-620.

Электрическая схема экспериментальной установки представлена на рис. 7. Она содержит катушку индуктивности ($L = 0.31$ Гн, $R_L = 30$ кОм), два конденсатора с емкостью $C_1 = 1180$ пф (RC -цель) и $C_2 = 1290$ пф (RCL -цель), три набора резисторов с сопротивлениями $R_1 = 5$ кОм, $R_2 = 100$ кОм, $R_3 = 300$ кОм и $R_4 = 2$ МОм для RC -цели; $R_1 = 51$ Ом, $R_2 = 240$ Ом, $R_3 = 2.4$ кОм и $R_4 = 24$ кОм для RL -цели; $R_1 = 1$ кОм и $R_2 = 15$ кОм для RCL -цели и генератор импульсов прямоугольной формы - мультивибратор М.

Приведенный набор дискретных элементов позволяет задавать более 20 вариантов заданий и оценивать избирательные свойства линейных цепей, наблюдать отклик линейной цепи, возникающие при колебательных и апериодических процессах, проверять условия дифференцирования и интегрирования импульсных сигналов, выявлять оптимальные для конкретных задач параметры и режимы функционирования.

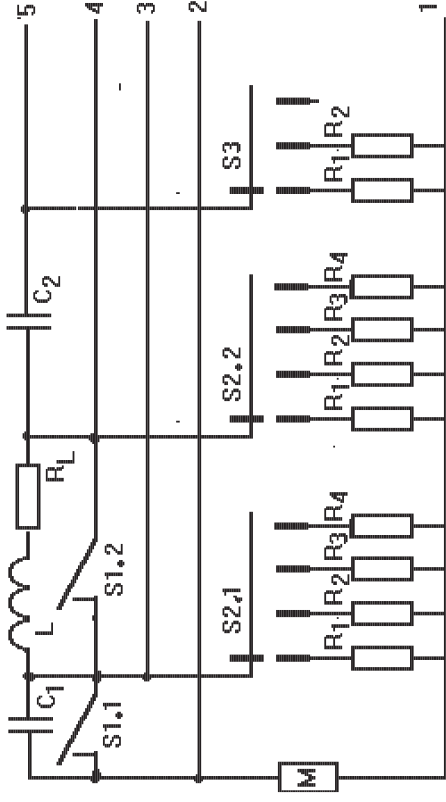


Рис. 7

Выбор режимов работы линейных цепей осуществляется переключателями $S1 - S3$. При исследовании откликов RC -цепи переключатель $S1.1$ находится в разомкнутом состоянии, а переключатель $S1.2$ замкнут, при исследовании откликов RL -цепи состояние этих переключателей изменяется на противоположное. Переключателями $S2.1$ и $S2.2$ дискретно изменяются постоянные времени RC - и RL -цепи соответственно. При исследовании процессов в RCL -цепи выключателя $S1.1, S1.2, S2.1$ и $S2.2$ разомкнуты. Переключатели $S1 - S3$ и коммутатор выходов с клемм 1 - 5, позволяющий измерять напряжения на различных элементах, конструктивно объ-

Отклик на произвольное воздействие имеет вид интеграла Дюамеля:

$$x_{\text{вых}}(t) = x(0)g(t) + \int_0^t x'(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad \text{или} \quad x_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t x(t - \tau)h(\tau)d\tau.$$

Отношение комплексной амплитуды отклика линейной системы на гармоническое воздействие к комплексной амплитуде воздействия называется *комплексной функцией передачи* цепи $H(j\omega)$, а отношение изображений отклика и воздействия - *операторной передаточной или системной функций*. Это частотные характеристики линейной цепи или системы.

Комплексная функция передачи $H(j\omega)$ представляет прямое преобразование Фурье импульсной характеристики $h(t)$ линейной цепи. Справедливо и обратное преобразование Фурье. Поэтому

$$\dot{H}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt, \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{H}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3)$$

Системная функция $H(s)$ представляет L -изображение импульсной характеристики $h(t)$. Поэтому

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt, \quad h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s)e^{st} ds. \quad (4)$$

Итак, формулы (3) и (4) устанавливают взаимно-однозначные соответствия временных и частотных описаний. Частотное описание цепей и систем тоже позволяет находить отклик на произвольные (не элементарные) воздействия [1, с. 153-154]. Методика экспериментального исследования и расчета преобразованных сигналов с помощью частотных описаний исследуются в лабораторной работе.

Принципы расчета и моделирования линейных систем

LCR -цепи как представители пассивных линейных систем. Пассивную линейную систему для низких частот [1, с.115-116] можно представить моделью с сосредоточенными параметрами.

Если все элементы цепи резистивные или цепь содержит единственный реактивный элемент, то она описывается линейным алгебраическим уравнением вида $x_{\text{вых}}(t) = Ax_{\text{вх}}(t)$, где A - вещественный параметр системы. При этом спектры отклика и воздействия совпадают.

Цепи, содержащие резистор R и один реактивный элемент, т.е. инерционные цепи с одной индуктивностью L или с одной емкостью C описываются дифференциальными уравнениями первого порядка. Длительность запаздывания отдельных составляющих отклика относительно воздействия оказывается различной, что приводит к изменению формы сигнала. В RC - и RL -цепях может происходить подавление отдельных участков спектра сигналов и, как следствие, их дифференцирование или интегрирование.

$$= \frac{\alpha U_0}{\omega} - U_0 \frac{2\alpha}{\omega} \left[e^{-\alpha t} \sin \omega t \sigma(t) - e^{-\alpha(t-t_n)} \sin \omega(t-t_n) \sigma(t-t_n) \right], \quad (14)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

Дифференцирование и интегрирование импульсных сигналов в линейных RC- и RL-цепях

Электрическая цепь называется *дифференцирующей*, если мгновенные значения напряжения на выходе цепи пропорциональны производной по времени от мгновенных значений напряжения на входе цепи, т.е.

$$U_{\text{вых}} = M_1 \frac{dU_{\text{вх}}}{dt},$$

и *интегрирующей*, если мгновенные значения напряжения на выходе цепи пропорциональны интегралу от мгновенных значений напряжения на входе цепи, т.е.

$$U_{\text{вых}} = M_2 \int_0^t dU_{\text{вх}} dt,$$

где M_1 и M_2 - некоторые коэффициенты пропорциональности, зависящие от постоянной времени цепи.

Постоянной времени цепи называется промежуток времени, в течение которого параметр, характеризующий переходный процесс, изменяется в e раз.

Принципы дифференцирования и интегрирования сигналов рассмотрены в [1, с.170-172, 2, с.215-219].

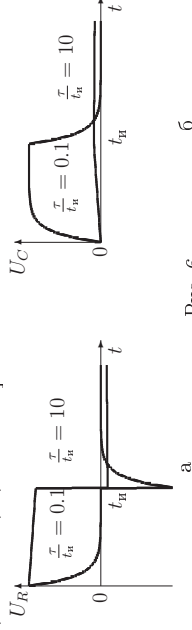


Рис. 6

Строгое дифференцирование и интегрирование в RC- или RL-цепях невозможно, но при малых значениях постоянной времени цепи τ выходное напряжение на R в RC-цепи или на L в RL-цепи представляет совокупность двух остроконечных импульсов, разделенных временем t_n и наминающих по форме дельта-функции Дирака, которые должны были появиться в указанные моменты времени при строгом дифференцировании прямоугольного импульса. Остроконечные импульсы можно считать удвоенными дельта-функциями, а цепь *квазидифференцирующей* или "почти дифференцирующей", если

$$\tau < \frac{1}{10} \quad (15)$$

Те же цепи при больших значениях постоянных времени цепи

$$\tau > \frac{10}{t_n} \quad (16)$$

могут выполнять функции интегрирующих устройств. При этом выходные напряжения в пределах длительности импульса изменяется почти линейно (почти идеальное интегрирование), а с окончанием импульса убывает по экспоненциальному закону.

В тех случаях, когда исследуется запаздывание сигнала или определяются характеристики переходного процесса, описания во временной области более удобны, чем частотные. Когда же анализируются фильтрующие свойства цепи или системы, описание в частотной области оказывается наиболее эффективным.

Системы с двумя энергоемкими элементами разного вида (L и C) обладают резонансными свойствами и описываются дифференциальными уравнениями второго порядка. Распределение энергии в спектрах отклика и воздействия существенно различаются, и появляется возможность выявить особенности частотной фильтрации сигналов в цепи.

Для LCR-цепей можно использовать любое из четырех описаний, но спектральный и операторный методы дают более полное представление о физических процессах и проще в интерпретации.

Таким образом, RC-, RL- и LCR-цепи можно рассматривать в качестве типовых моделей большинства пассивных линейных систем, а методы их расчетов и экспериментальных исследований в качестве стандартных методов анализа характеристик.

Для экспериментального определения характеристик линейной цепи достаточно последовательно соединить источник сигналов с пассивными элементами цепи и поочередно измерить возникающие на них отклики. Основная задача состоит в правильном выборе сигнала воздействия.

Прежде всего, сигнал должен описываться простыми математическими соотношениями и обладать широким и легко рассматриваемым спектром, что необходимо для эффективного использования спектрального и операторного методов. Этим требованиям удовлетворяет периодические последовательности импульсов прямоугольной формы. При большой скважности последовательности $q = T/t_n$ (T - период повторения, t_n - длительность импульсов) уже первые два-три лепестка спектра будут содержать необходимое число спектральных гармоник. (Например, при $q = 10$ в первых двух лепестках спектра содержится 18 гармоник). Нельзя не учитывать и того, что последовательность прямоугольных импульсов легко практически реализовать в лабораторной работе с помощью простейшего автогенератора - мультивибратора, а исследование характеристик линейных цепей при таком воздействии имеет большой практический смысл, так как прямоугольные импульсы наиболее часто встречаются в радиосистемах различного назначения (в радиолокации, в телевизионной и измерительной технике), а в цифровых устройствах и ЭВМ являются основным видом сигналов.

А. Расчет откликов линейных систем спектральным методом

Для расчета отклика линейной цепи на периодическое воздействие $\tilde{U}(t) = \tilde{U}(t+T)$ спектральным методом необходимо [1, с.153]:

1) представить воздействие в виде разложения в ряд Фурье

$$\tilde{U}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{jn\omega t},$$

где T - период сигнала, $\omega = 2\pi/T$ - круговая частота его первой гармоники,

2) для каждой гармоники воздействия $\tilde{C}_n = |\tilde{C}_n| e^{j\varphi_n}$ рассчитать комплексный коэффициент передачи цепи $\tilde{K}(jn\omega) = |\tilde{K}(jn\omega)| e^{j\varphi_K}$,

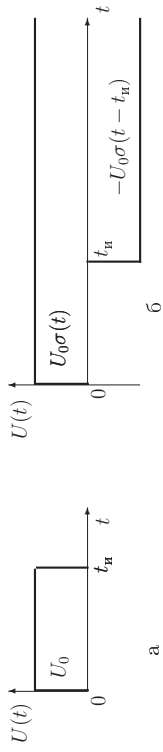


Рис. 5

Используя изображение функции Хевисайда и теорему запаздывания [1, 4], представим изображение $U(s)$ функции $U(t)$ в виде

$$U(s) = \frac{U_0}{s} - \frac{U_0}{s} e^{-st_n} = \frac{U_0}{s} (1 - e^{-st_n}). \quad (11)$$

Эту формулу предполагается вывести самостоятельно.

Операторные (системные) функции цепи в отличие от комплексных коэффициентов передачи той же цепи являются вещественными относительного s , что существенно облегчает расчет изображений откликов:

$$K_R(s) = \frac{2\alpha s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}, \quad K_L(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}, \quad K_C(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}, \quad (12)$$

где $\alpha = R/2L$, $\omega_0^2 = 1/LC$.

Операторные коэффициенты передачи для RL и RC -цепей предполагается записать самостоятельно, замещая в (6)–(8) $j\omega$ на s .

Изображение выходного сигнала $U_{\text{вых}}(s)$ является произведением $U(s)$, представленного формулой (11), и операторного коэффициента передачи цепи $K(s)$. Так, например, изображение напряжения $U_{\text{вых}}(s)$ удовлетворяет соотношению:

$$U_{\text{вых}}(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} (1 - e^{-st_n}) = \frac{U_0}{s} (1 - e^{-st_n}) \frac{2\alpha s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2} = \frac{2\alpha U_0}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2} (1 - e^{-st_n}). \quad (13)$$

Для определения $U_{\text{вых}}(t)$ по его изображению воспользуемся теоремой Хевисайда [1, 4]. Так как многочлен $F_2(s)$ имеет два корня $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ и $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, то

$$U_{\text{вых}}(s) = \left(\frac{F_1(s)}{F_2(s)} \Big|_{s=s_1} - \frac{F_1(s)}{F_2(s)} \Big|_{s=s_2} \right) \frac{1}{s-s_1} (1 - e^{-st_n}) = \frac{\alpha U_0}{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} \left(\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2} \right) (1 - e^{-st_n}),$$

а оригинал принимает вид:

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{\alpha U_0}{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} \left[(e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}) \sigma(t) - (e^{-s_1(t-t_n)} - e^{-s_2(t-t_n)}) \sigma((t-t_n)) \right] =$$

- 3) вычислить комплексные амплитуды гармоник в отклике цепи $\dot{C}_{\text{вых}} = |\dot{C}_n| |K(n\omega)| e^{j(\varphi_n + \varphi_K)}$,
- 4) разделить период сигнала T на N равных частей ($N \geq 20$)
- 5) для каждого $t_i = iT/N$ вычислить

$$\dot{U}_{\text{вых}}(t_i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_{\text{вых}} e^{jn\omega t_i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\dot{C}_n| |K(n\omega)| e^{j(n\omega t_i + \varphi_n + \varphi_K)}.$$

Спектральное представление последовательности импульсов. Периодическую последовательность импульсов (рис. 1) можно представить в виде комплексного ряда Фурье:

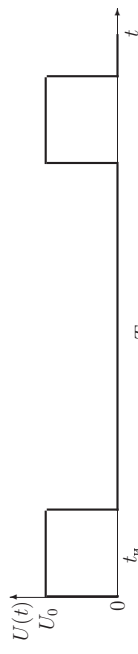


Рис. 1. Последовательность прямоугольных импульсов

$$\dot{U}(t) = U_0 \frac{t_n}{T} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi n t_n / T}{\pi n t_n / T} e^{j2\pi n(t-t_n/2)/T} \right) \quad (5)$$

или в вещественной форме

$$U(t) = U_0 \frac{t_n}{T} + 2 \frac{U_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n t_n / T}{n} \cos \frac{2\pi n}{T} (t - \frac{t_n}{2})$$

Эти формулы предполагается вывести самостоятельно.

Комплексные коэффициенты передачи линейных цепей. В лабораторной работе исследуются характеристики LCR , RC и RL -цепей (рис. 2). Две последние являются частными случаями LCR -цепи при $L=0$ и $1/C=0$.

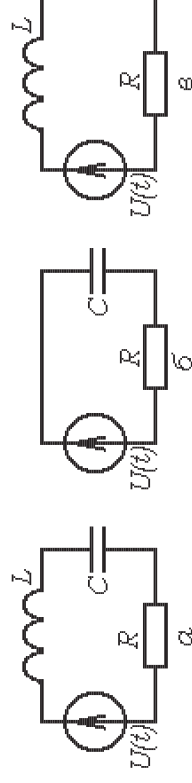


Рис. 2

Комплексная амплитуда тока, вызванного в LCR -цепи действием источника ЭДС $U(t) = U_0 e^{j\omega t}$, имеет вид

$$\dot{I}_m = \frac{U_0}{R + j\omega L + 1/j\omega C} = |\dot{I}_m| e^{-j\varphi} = \frac{U_0 e^{-j\omega t} \text{arctg}(\omega L/R - 1/\omega CR)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}.$$

Тогда для комплексных коэффициентов передачи имеем:

$$\dot{K}_R(\omega) = \frac{\dot{I}_m R}{U_0} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} e^{-j\varphi}, \quad (6)$$

$$\dot{K}_L(\omega) = \frac{j\omega L \dot{I}_m}{U_0} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} e^{-j\varphi + j\pi/2}, \quad (7)$$

$$\dot{K}_C(\omega) = \frac{\dot{I}_m / j\omega C}{U_0} = \frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} e^{-j\varphi - j\pi/2}. \quad (8)$$

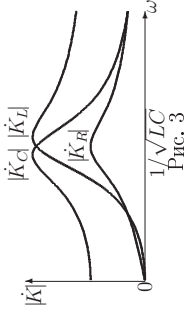


Рис. 3

Модуль \dot{K}_R (рис. 3) достигает максимального значения на частоте $\omega = 1/\sqrt{LC}$, а модули \dot{K}_L и \dot{K}_C вблизи ω_0 . Комплексные коэффициенты передачи RC - (рис. 4-а) и RL -цепи (рис. 4-б), которые предполагается вывести самостоятельно из (6) - (8) при $L = 0$ и $C \rightarrow \infty$, монотонно изменяются с частотой.

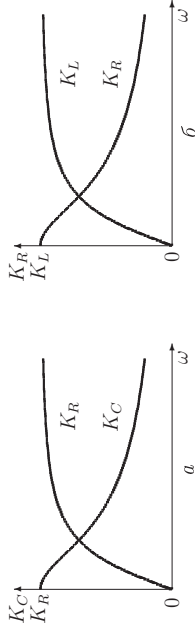


Рис. 4

Из графиков видно, что обе цепи обладают частотной избирательностью. С ростом частоты сигнала $|\dot{K}_C|$ в RC -цепи и $|\dot{K}_R|$ в RL -цепи уменьшаются, т.е. происходит подавление высокочастотных гармоник, а $|\dot{K}_R|$ в RC -цепи и $|\dot{K}_L|$ в RL -цепи уменьшаются в области низких частот, что способствует подавлению низкочастотных составляющих сигналов. Это позволяет использовать RC - и RL -цепи для дифференцирования и интегрирования полигармонических, чаще всего импульсных сигналов.

Расчет комплексных амплитуд и временных реализаций выходных сигналов. Согласно (5) спектр последовательности прямоугольных импульсов (рис. 1) содержит постоянную составляющую $U_0 n/T$ и гармоники с амплитудами $2 \frac{U_0}{T} \sin \frac{\pi n t_n}{T}$. Если период повторения импульсов и их длительность известны, нетрудно определить частоты всех гармоник сигнала $n\omega_1 = 2\pi n/T$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ и рассчитать их комплексные амплитуды.

Далее, в зависимости от заданного вида линейной цепи для каждой из гармоник входного сигнала в отдельности по формулам (6) - (8) вычисляются значения модулей и аргументов комплексных коэффициентов передачи и комплексные амплитуды гармоник выходных сигналов в виде произведений комплексных амплитуд гармоник входного сигнала и коэффициента передачи цепи для соответствующей гармоники, т.е. формируются комплексные спектры выходных сигналов.

Этих данных достаточно для определения временных функций выходных реакций цепи на воздействие в виде последовательности прямоугольных импульсов:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{вых}}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{K}(n\omega_1) \dot{C}_n e^{j2\pi n(t-t_n/2)/T} = \\ &= U_0 \frac{t_n}{T} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |K(n\omega_1)| \frac{\sin \frac{\pi n t_n}{T}}{\pi n t_n / T} e^{j2\pi n(t-t_n/2)/T + j\varphi_K} \right), \end{aligned}$$

где φ_K - аргумент $\dot{K}(n\omega_1)$.

Объединяя гармоники с номерами n и $-n$, получим $U_{\text{вых}}(t)/U_0$ в вещественном виде:

$$\frac{U_{\text{вых}}(t)}{U_0} = \frac{K(0)t_n}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|K(n\omega_1)|}{n} \sin \frac{\pi n t_n}{T} \cos \left(\frac{2\pi n}{T} \left(t - \frac{t_n}{2} \right) + \varphi_K(n\omega_1) \right). \quad (9)$$

В. Расчет откликов линейных систем операторным методом

Для расчета отклика линейной цепи на импульсное воздействие операторным методом необходимо [1, с.153-154]:

- 1) получить операторное изображение $U(s)$ [1, с.66-74, 151-154, 4, с.71-74, 256-264] входного воздействия $U(t)$,
- 2) записать системные функции цепи $K(s)$, замещаая в формулах (6) - (8) $j\omega$ комплексной частотой s ,
- 3) получить операторные выражения для реакций линейной цепи, перемножая $U(s)$ и $K(s)$:

$$U_{\text{вых}}(s) = U(s)K(s),$$

4) используя теоремы восстановления оригиналов по изображениям и представляя $U_{\text{вых}}(s)$ в виде суммы простых дробей [1, 4], вывести оригиналы $U_{\text{вых}}(t)$ для откликов линейной цепи,

5) разделить период колебания на N равных частей ($N \geq 20$) и для каждого $t_i = iT/N$ вычислить $U_{\text{вых}}(t_i)$.

Операторное изображение прямоугольного импульса. Представим прямоугольный импульс (рис. 5,а) наложением двух сдвинутых во времени функций Хевисайда (рис. 5,б):

$$U(t) = U_0 \sigma(t) - U_0 \sigma(t - t_n). \quad (10)$$